Übungsserie 1
Grundkenntnisse Mathematik

Um den Inhalten der Vorlesung Netzwerke und Schaltungen I folgen zu können müssen Sie über gewisse Grundkenntnisse der Mathematik verfügen, die neben den Grundrechenarten auch Integralrechnung, Linien- und Hüllflächenintegrale, Vektoren und Vektorrechnung, sowie orthogonale Koordinatensysteme umfassen.

Die Grundlagen der Integralrechnung sowie Vektoren und Vektorrechnung werden die meisten von Ihnen in der Schule gelernt haben. Zur Wiederholung und Festigung haben Sie von der ETH die Einladung zu einem Selbsttest bekommen und können mit einem Online-Brückenkurs eventuell vorhandene Lücken schliessen. Falls Sie dies noch nicht gemacht haben, arbeiten Sie bitte mindestens die folgenden Lernpfade durch und lösen Sie die angegebenen Lerntests.

1.1 Integralrechnung

Lernpfade

a) Einführung des bestimmten Integrals

b) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

c) Elementare Integrationsregeln

Lerntest

Version (A), Aufgaben 1-3, https://pontifex.ethz.ch/s21t5/integral.htm

Aufgabe 1

In Kupfer befinden sich pro m^3 typischerweise $1 \cdot 10^{28}$ Ladungsträger, die Ladungsträgerdichte ist also $\rho = 1 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$. Berechnen Sie, wie viele Ladungsträger sich in einem Dodekaeder, siehe Abbildung 1.1, aus Kupfer mit der Kantenlänge $a = 2\,\mathrm{cm}$ (Oberfläche $A = 82.6\,\mathrm{cm}^2$, Volumen $V = 61.3\,\mathrm{cm}^3$) befinden. Stellen Sie hierfür eine mathematisch formale Integralgleichung auf und lösen Sie diese.

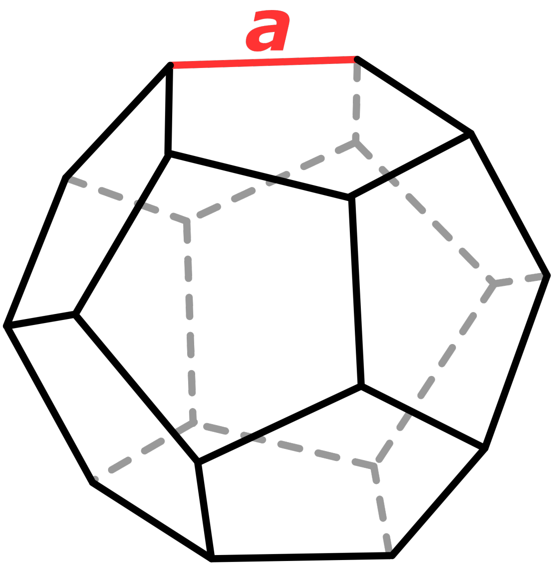

Abbildung 1.1: Dodekaeder mit Kantenlänge a.

Hinweis: Das Integral zu lösen ist sehr einfach.
Musterlösung:

$$N = \int_V \rho \mathrm{d}V = \rho V = 1 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3} \cdot 61.3\,\mathrm{cm}^3 = 61.3 \cdot 10^{22} \text{ Ladungsträger} \tag{1.1}$$

1.2 Vektorgeometrie

Lernpfade:

a) Grundlagen der Vektorgeometrie

b) Skalarprodukt und Vektorprodukt

Lerntest: *Version (A), Aufgaben 1-3*, https://pontifex.ethz.ch/s21t5/vektor.htm

Zusätzlich sollten Sie Appendix A aus dem Lehrbuch von Albach durcharbeiten.

Aufgabe 2

Auf einen Gegenstand im Ursprung (0, 0) wirken die zwei Kräfte F_1 und F_2 gemäss Abbil-dung 1.2. Welche der Kräfte a) bis d) muss zusätzlich einwirken, damit sich der Gegenstand *nicht* bewegt?

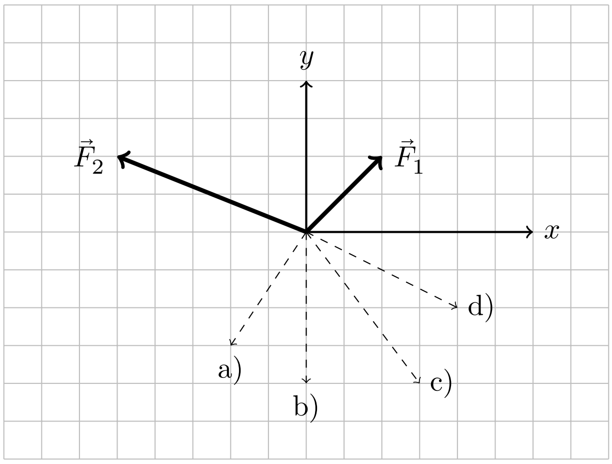

Abbildung 1.2: Vektoren in einer Ebene

Musterlösung:
Man bilde die Summe $\vec{F}_{12}$ der zwei Vektoren um die Gesamtkraft zu berechnen, siehe Abbildung 1.3. Zusammen mit dem Vektor c) ergibt diese dann Null.

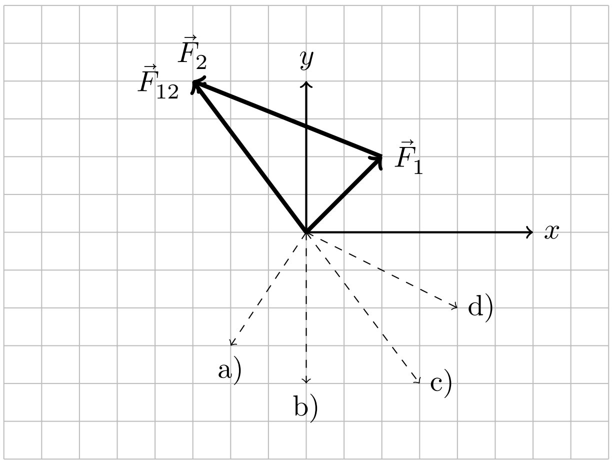

Abbildung 1.3: Vektoren in einer Ebene

1.3 Orthogonale Koordinatensysteme

Arbeiten Sie Appendix B aus dem Lehrbuch von Albach durch.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein Punkt P mit den kartesischen Koordinaten $(3, 5, 2)$. Zeichnen Sie diesen Punkt P jeweils in einem kartesischen Koordinatensystem, sowie in Zylinder- und Kugelkoordinaten. Geben Sie auch die Koordinaten des Punktes P für alle Koordinatensysteme an.
Musterlösung:
Zylinderkoordinaten: $r = \sqrt{34} \quad \varphi = 1.03 rad \quad z = 2$
Kugelkoordinaten: $r = \sqrt{38} \quad \vartheta = 1.24\text{rad} \quad \varphi = 1.03\text{rad}$

1.4 Linien- und Hüllflächenintegrale

Arbeiten Sie Appendix C aus dem Lehrbuch von Albach durch.

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_{\mathrm{r}}$.
Wählen sie zuerst ein geeignetes Koordinatensystem, anschliessend eine beliebig grosse geschlossene Hüllfläche die den Ursprung des Koordinatensystems einschliesst und integrieren Sie den Fluss Ψ dieses Vektorfeldes durch die Hüllfläche $\Psi = \iint_A \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$.
Musterlösung: Da das Vektorfeld kugelsymmetrisch ist (nur eine Komponente in radialer Richtung) wählen wir Kugelkoordinaten. Als Hüllfläche bietet es sich an eine Kugel mit beliebigem Radius r_1 zu verwenden. Damit ist der Fluss

$$\Psi = \iint_A \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \vec{F} \text{ einsetzen bei } r_1 \tag{1.2}$$

$$= \iint_A \frac{Q}{4\pi r_1^2}\vec{e}_{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \mathrm{d}\vec{A} = \vec{e}_{\mathrm{r}} r_1^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \tag{1.3}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi r_1^2}\vec{e}_{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{r}} r_1^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \qquad \vec{e}_{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{r}} = 1 \tag{1.4}$$

$$= \frac{Q}{4\pi r_1^2} r_1^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \qquad \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2 \tag{1.5}$$

$$= \frac{Q}{4\pi r_1^2} 2 r_1^2 \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\varphi \qquad \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\varphi = 2\pi \tag{1.6}$$

$$= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \cdot 4\pi r_1^2 = Q \tag{1.7}$$

Bemerkung: die Gleichungen C.14 und C.15 aus dem Albach vereinfachen diese Integration auf eine einfache Multiplikation

$$\Psi = \iint_A \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \vec{F} \text{ einsetzen bei } r_1 \tag{1.8}$$

$$= \iint_A \frac{Q}{4\pi r_1^2}\vec{e}_{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad C.14 \tag{1.9}$$

$$= \iint_A \frac{Q}{4\pi r_1^2}\mathrm{d}A \qquad C.15 \tag{1.10}$$

$$= \frac{Q}{4\pi r_1^2} A \qquad A = 4\pi r_1^2 \tag{1.11}$$

$$= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \cdot 4\pi r_1^2 = Q \tag{1.12}$$