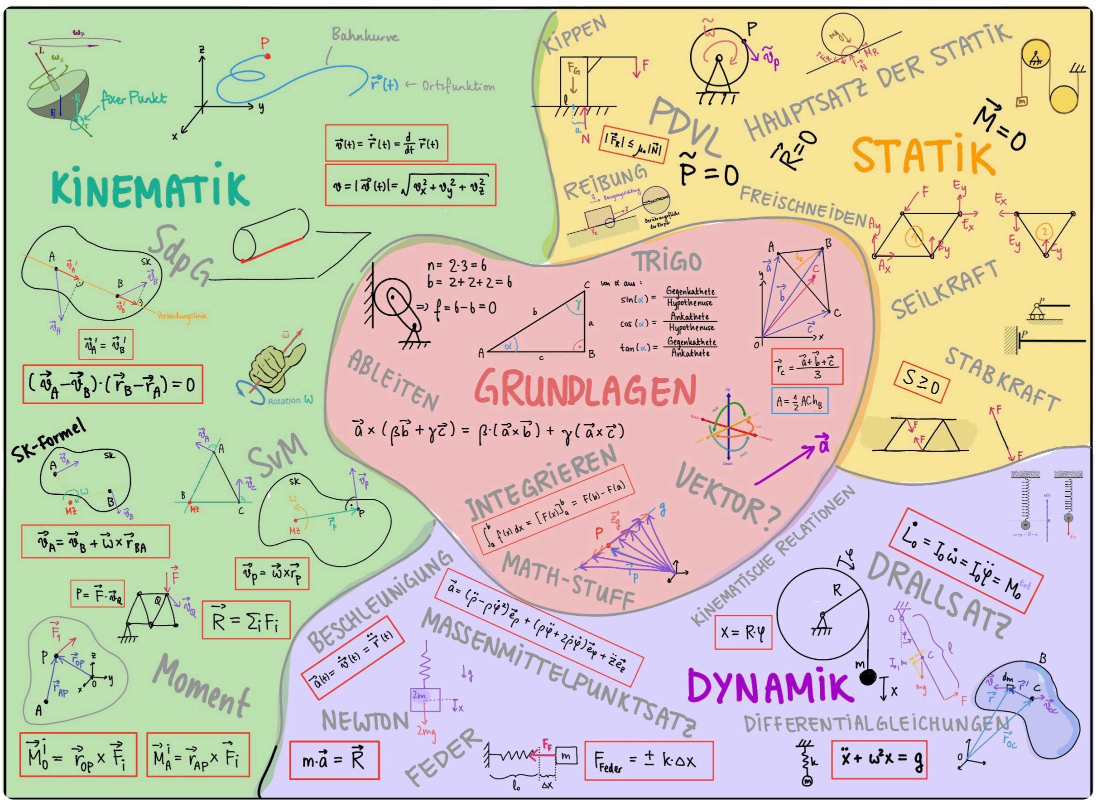
D-ITET / D-MAVT / D-USYS

Technische Mechanik

PVK



* Diese Abbildung enthält nicht alle Formeln!

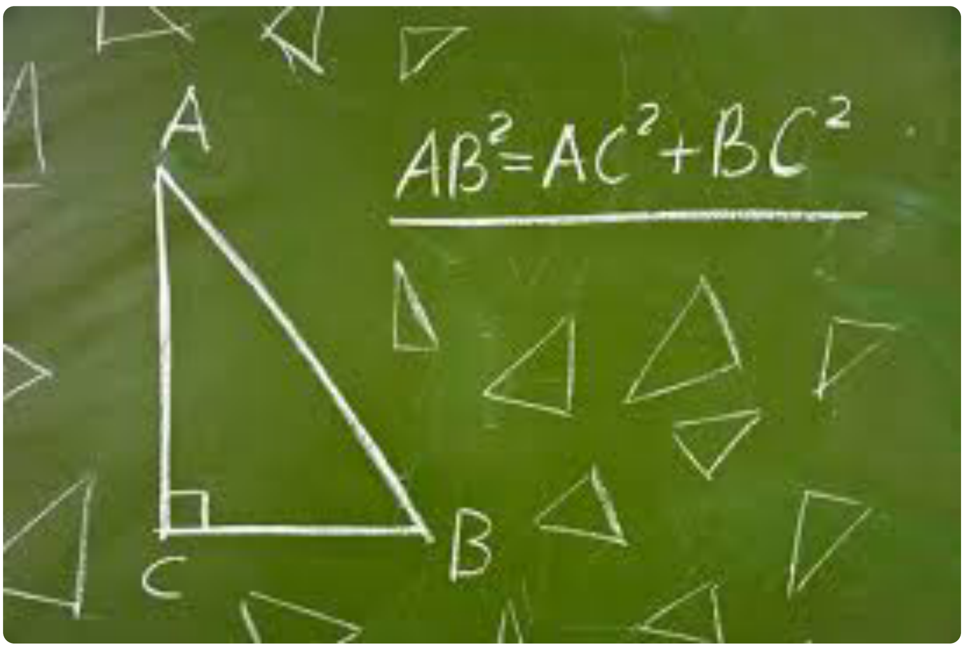
Manuskript

Erstellt von Lina De Windt in Kollaboration mit Maximilian Stralz

Für die Vorlesung "Technische Mechanik" von Dr. P. Tiso

ETH Zürich Herbstsemester 2022

Teil 1



Grundlagen

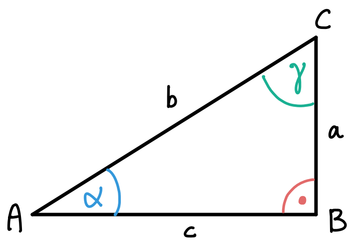
In diesem Kapitel werden die für TechMech (& auch (zumindest für ITET-people) für fast alle anderen Fächern im Studium) nötigen mathematischen & physikalischen Grundlagen (kurz & knapp, nur das Wichtigste) vorgestellt.

Dieses Kapitel werden wir nicht im Detail durchgehen im PVK. Es ist eher für das Selbststudium / als Nachschlageort gedacht. Falls gewisse Themen in diesem Kapitel noch nicht gut sitzen, raten wir euch auf jeden Fall euch noch einmal Zeit zu nehmen um diese Themen anzuschauen. Denn wenn die Grundlagen nicht gut sitzen, kommt man nicht sehr weit in den Aufgaben!

Trigonometrie

In der Trigonometrie werden die Beziehungen zwischen Seiten & Winkeln von Dreiecken untersucht.
Hier aufgelistet sind die Must-Knows von Trigonometrie für TechMech (& auch für das weitere Studium).

Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck



von α aus: (in diesem Bsp.)

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{c}$$

von γ aus: (in diesem Bsp.)

$$\sin(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{c}{a}$$

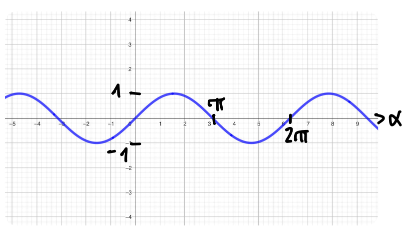
Merksprüche: ① $\overset{s}{\frac{G}{H}} \quad \overset{c}{\frac{A}{H}} \quad \overset{t}{\frac{G}{A}}$ wenn man es dem gelben Pfeil nach liest: GAGHHA ("Lady Gaga")

② Aus dem englischsprachigen Raum: "SohCahToa" (↑ Sin, ↑ Cos, ↑ Tan)

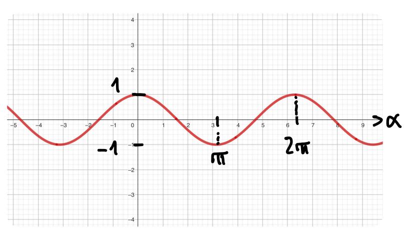
o: opposite (Gegenkathete)
a: adjacent (Ankathete)
h: hypothenuse

Wichtig: $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ sind (periodische) Funktionen. D.h, sie lassen sich graphisch darstellen!

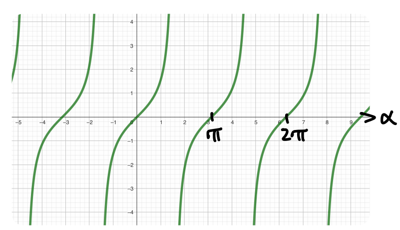
Graphen der wichtigsten trigonometrischen Funktionen



$\sin(\alpha)$ 2π-periodisch



$\cos(\alpha)$ 2π-periodisch



$\tan(\alpha)$ π-periodisch

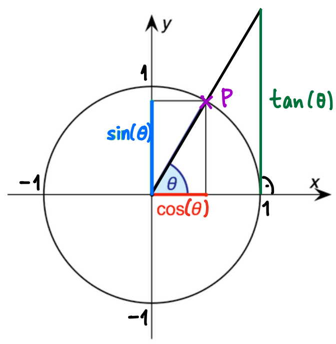
Wichtig: Die Umkehrfunktionen von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ sind (der Reihenfolge nach) $\arcsin(a)$, $\arccos(a)$, $\arctan(a)$. ($\arcsin(a)$, $\arccos(a)$ nur definiert auf $a \in [-1,1]$)

Es ist wichtig zu wissen wie man diese verwenden kann bei Gleichungen mit trig. Funktionen.

Bsp.: $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, α gesucht.

$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$

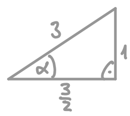
Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis



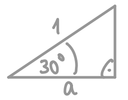
$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ ← x-Koordinate ← y-Koordinate

x-Achse: Cosinus , y-Achse: Sinus

Trigonometrie, Anwendungen Beispiele:

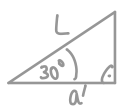
1) 

Bestimme α $\longrightarrow$ $\sin(\alpha) = \frac{G}{H} = \frac{1}{3}$ $\iff$ $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \cong \underline{\underline{19.47°}}$

2) 

Warum cos? → Stelle dir den Einheitskreis vor!

Bestimme a $\longrightarrow$ $a = \cos(30°) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

3) 

Bestimme a' $\longrightarrow$ $\frac{a'}{L} = \cos(30°) \iff a' = L \cdot \cos(30°) = \underline{\underline{L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

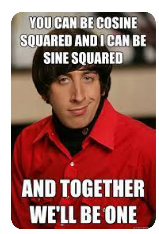
ODER: Strahlensatz anwenden auf 2) $\longrightarrow$ $a' = L \cdot a = \underline{\underline{L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

Wichtigste Eigenschaften / Trigrules

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ (Pythagoras über Einheitskreis!)
- $\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha)$

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ "gerade Funktion"
- $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$ 2π-periodizität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ "ungerade Funktion"
- $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$ 2π-periodizität



Winkeltabelle

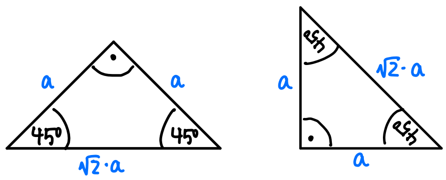
Gradmaß φ	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Merkregel

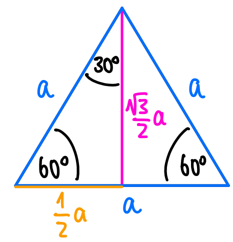
Gradmaß φ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

Dreiecke, die häufig vorkommen in TechMech

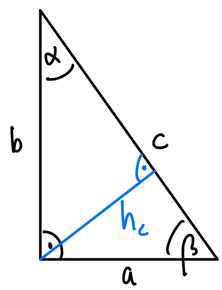
gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck



gleichseitiges Dreieck:



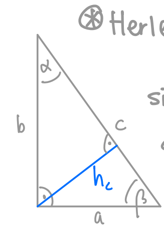
allg. rechtwinkliges Dreieck



$c = \sqrt{a^2+b^2}$ (Pythagoras)

$h_c = \frac{a \cdot b}{c}$ ⊛

⊛ Herleitung:



$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$

$\Leftrightarrow h_c = a \sin(\beta)$ ... ①

aber auch

$\sin(\beta) = \frac{b}{c}$

$\Leftrightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$ ... ②

① & ② $\Rightarrow h_c = a \cdot \sin\left(\arcsin\left(\frac{b}{c}\right)\right)$

$\Leftrightarrow h_c = a \cdot \frac{b}{c}$ □

DEG vs. RAD

Winkel kann man entweder in DEG (Gradmass, °) oder RAD (Radmass, SI-Einheit für Winkelmasse) angeben.

Die Umformung zwischen DEG und RAD erfolgt wie folgt:

RAD → DEG

$$\boxed{\alpha \text{ RAD} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180°}$$

schreibt man normalerweise nicht.

DEG → RAD

$$\boxed{\alpha° = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi \text{ RAD}}$$

Wichtige Grössen:

$\frac{\pi}{2}$ (RAD) = 90°

·2 ↓ ↑ ·2

π (RAD) = 180°

·2 ↓ ↑ ·2

2π (RAD) = 360°

usw.

in Trig.funktionen einsetzen: $\cos(\pi) = \cos(180°) = -1$

$\sin(\pi) = \sin(180°) = 0$

$\sin(2\pi) = \sin(360°) = 0$

usw.

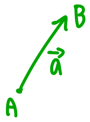
⚠ Passt auf dass ihr jeweils den Taschenrechner richtig einstellt!
(RAD or DEG → jedes Mal überprüfen!)

Vektoren (2D & 3D)

Basics: Was sind Vektoren überhaupt? Im Rahmen der Technischen Mechanik Vorlesung sind Vektoren einfach gesagt Pfeile. Ein Vektor hat immer eine Länge und eine Richtung. (z.B. $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$)

Länge ↑ ↑ Richtung

Beispiel



$\vec{a}$ ist ein Vektor vom Punkt A zu Punkt B.

Ein Vektor kann auf zwei Arten beschrieben werden:

① 2D: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ← x-Komponente, ← y-Komponente

3D: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ← x-Komponente, ← y-Komponente, ← z-Komponente

↑

Vorteil dieser Schreibweise: übersichtlich

② $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$

Einheitsvektoren (Basis)

$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$

↑

Vorteil dieser Schreibweise: Basis (hier $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) sofort klar

Good to know: Notation von Vektoren (die folgenden Schreibweisen sind äquivalent):

- $\vec{a}$ Pfeil oben
- $\underline{a}$ Strich unten
- $\mathbf{a}$ fett

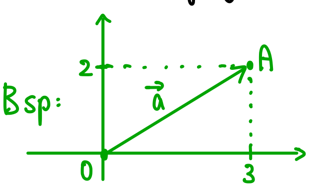
Ihr dürft die Schreibweise wählen die ihr möchtet, doch bleibt konsistent! Ich werde in meinen Übungsmaterialien die Schreibweise mit dem Pfeil oben ($\vec{a}$) benutzen.

Länge und Richtung: Die Länge (aka. Betrag, (zwei-) Norm) eines Vektors beschreibt, wie lang ein Vektor ist. Diese wird wie folgt bestimmt:

2D: $\boxed{|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$

3D: $\boxed{|\vec{b}| = b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Bsp:



$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

↪ das ist eigentlich nichts anderes als Pythagoras.

kleine Übungen: Bestimme die Länge der folgenden Vektoren:

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 5) $\vec{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$a = |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$b = |\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

$c = |\vec{c}| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 2} = \sqrt{\frac{19}{9}} = \frac{\sqrt{19}}{3}$

$d = |\vec{d}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$e = |\vec{e}| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + 1 + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

Die Richtung eines Vektors wird mit sogenannten Einheitsvektoren angegeben. Die Eigenschaft der Einheitsvektoren ist, dass sie immer die Länge 1 haben.

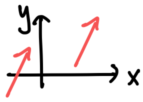
z.B. ist $\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor, da $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

Good to know: Einheitsvektoren schreibt man in der Regel so: $\vec{e}_j$

(wobei j der Index ist → d.h. an der Stelle von j kommen Zahlen / Buchstaben)

Nun wissen wir, wie Vektoren beschrieben werden: $\vec{a} = \underset{\text{Länge}}{a} \cdot \underset{\text{Richtungen}}{\vec{e}_a}$

Da ein Vektor einzig durch ihre Länge & Richtung definiert ist, ist es "egal", wo im Raum sie sich befindet. d.h.



diese 2 Vektoren sind genau dieselben Vektoren.

Good to know: dies ist die analytische Schreibweise von Vektoren. In TechMech sind die Einheitsvektoren i.d.R. die Basisvektoren ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ oder $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$). Deswegen musst du dich oft nicht wirklich um diese kümmern. Vor allem wenn du dein Ergebnis in diese Form: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ angibst, sind die Einheitsvektoren (in diesem Fall $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$) sozusagen schon mit inbegriffen.

Bsp: geben Sie Länge und Richtung der folgenden Vektoren an:

1) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

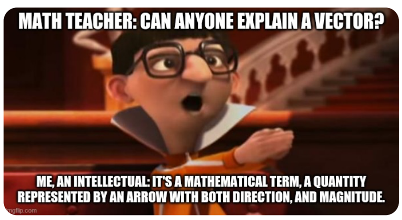
Länge: $|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

Richtung: $\vec{e}_p = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}}}_{\text{durch die Länge teilen}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}}$

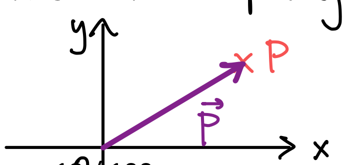
2) $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Länge: $|\vec{q}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

Richtung: $\vec{e}_q = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{38}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}}$



Ortsvektor: verbindet einen Punkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems. Dieser ist eindeutig definiert.



$\vec{p}$ ist der Ortsvektor vom Punkt P.

Rechnen mit Vektoren: Jetzt wo wir gelernt haben, was Vektoren sind, können wir anfangen mit diesen zu rechnen :)

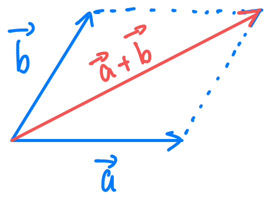
Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ zwei Vektoren. Dann:

Addition:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Visuell:

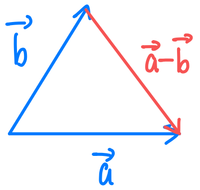


Subtraktion:

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

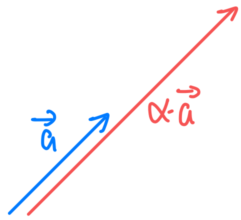
Visuell:



Multiplikation mit einem Skalar:

$$\boxed{\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_x \\ \alpha \cdot a_y \\ \alpha \cdot a_z \end{pmatrix}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Visuell:



mit $\alpha = 2$

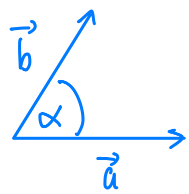
Bsp: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 15 + 2 = 25$

Good to know: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)}$



α: der von den beiden Vektoren eingeschlossener Winkel.

Good to know: orthogonale Vektoren: 2 Vektoren, dessen Skalarprodukt 0 ergibt, sind orthogonal (= senkrecht) aufeinander.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}}$$

orthogonal zu

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zusatzfrage: Wann sind 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander?

Lö: Wenn der Richtungsvektor gleich ist, oder wenn $|\vec{a}\times\vec{b}|=0$

Kreuzprodukt:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-a_z b_y\\a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z\\a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\end{pmatrix}}$$

← nur in 3D.

Bsp: $\begin{pmatrix}2\\7\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35-12\\4-10\\6-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\-6\\-1\end{pmatrix}$

Wie kann ich mir die Formel für das Kreuzprodukt merken? → 2 Tricks:

① Der 3-Fisch-Trick:

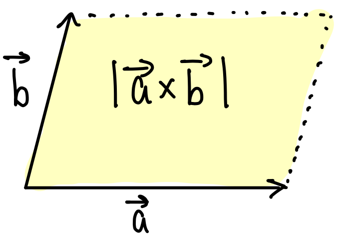
$$\begin{matrix}\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\\a_x\\a_y\end{matrix}\times\begin{matrix}\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}\\b_x\\b_y\end{matrix}=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-b_y\cdot a_z\\a_z\cdot b_x-b_z\cdot a_x\\a_x\cdot b_y-b_x\cdot a_y\end{pmatrix}$$

↑ die ersten 2 noch mal unten aufschreiben

② die platzsparende Methode:

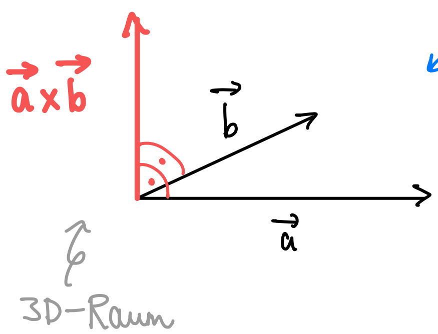
$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-b_y\cdot a_z\\a_z\cdot b_x-b_z\cdot a_x\\a_x\cdot b_y-b_x\cdot a_y\end{pmatrix}$$

Good to know: Geometrische Bedeutung des Kreuzprodukts:

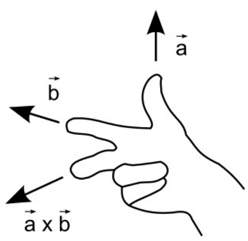


$|\vec{a}\times\vec{b}|$ ist die Fläche des Parallelogramms, welcher von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird.

Good to know: $\vec{a}\times\vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ sowie $\vec{b}$.

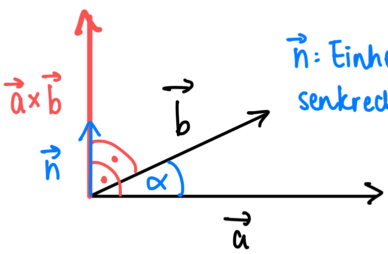


hier gilt die Rechte-Hand-Regel:



Good to know: $\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha)}$

auch: $\vec{a}\times\vec{b}=(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\,\sin(\alpha))\,\vec{n}$



$\vec{n}$: Einheitsvektor, welcher senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

Rechnen mit Wurzeln

Basics:

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Beispiele:

- $\sqrt{4+21} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{4} + \sqrt{21} \cong 6{,}58$
- $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = |-3|$
- $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6 \overset{\checkmark}{=} \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3$
- $\sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = 5 \cdot \sqrt{7}$
- $\sqrt{\frac{4}{36}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \overset{\checkmark}{=} \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Brüche umformen: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$

häufig verwendeter Trick! das ist einfach $\cdot 1$, deswegen dürfen wir den Bruch so erweitern

- $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

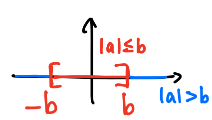
Wichtig: Wenn Gleichungen dieser Form: $a^2 = b \iff a = \pm\sqrt{b}$! 2 Lösungen!

Rechnen mit der Betragsfunktion

Nützliche mathematische Eigenschaften der Betragsfunktion:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (und $|a^n| = |a|^n$)
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (und $\left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a|^n}$)
- ⚠ $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \iff a \in [-1,1] \cdot b$



- ⚠ $|a| \leq c \cdot |b| \iff -c \cdot b \leq a \leq c \cdot b \iff a \in c \cdot [-1,1] \cdot b$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$

Ableiten, Basics

Sei eine Funktion $f(t)$ gegeben. Dann kann man dessen Ableitung schreiben als:

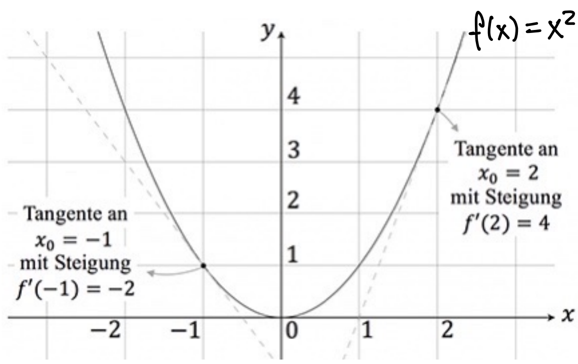
$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

⚠ in TechMech wirst du nur Funktionen einer Variable sehen (d.h. $x(t)$, $y(t)$, $f(x)$, $g(y)$). nur eine Variable!

Folglich werden wir immer (falls nichts anderes angegeben) nach dem Argument in der Funktion ableiten:

- $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
- $\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

Geometrisch entspricht die Ableitung einer Funktion der Tangentensteigung:



In der folgenden Tabelle sind die Ableitungen einiger wichtiger Funktionen aufgelistet:

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	Konstante
$a \cdot x + b$	a	
x^p	$p \cdot x^{p-1}$	Polynome
$e^{a \cdot x}$	$a \cdot e^{a \cdot x}$	
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	
$\ln(x)$	$1/x$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$2x^4$	$8x^3$	
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	
$1/x$	$-1/x^2$	

Beim Ableiten muss man auf gewisse Regeln achten:

Beispiel:

Summenregel: $f(x) = u(x) \pm v(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ $\quad f(x) := 3x + 5x^2 \rightarrow f'(x) = 3 + 10x$

Faktorregel: $f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konstante}}}{C} \cdot u(t) \longrightarrow f'(x) = C \cdot u'(t)$ $\quad f(x) := 5x^3 \rightarrow f' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$f(x) := 3x^2 e^x$

$\rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x = 6xe^x + 3x^2 e^x$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

$f(x) := \frac{4x^2}{x}$

$\rightarrow f'(x) = \frac{8x \cdot x - 4x^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2}{x^2} = 4$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \longrightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

$f(x) := \sin(x^3)$

$\rightarrow f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

Mit den Funktionen aus der Tabelle & diese Regeln kannst du bereits sehr viele Funktionen ableiten! :)

Integrieren, Basics of the Basics

Integration ist die Umkehrung des Ableitens:

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"] \end{tikzcd}$$

$$f(x) = F'(x) \iff F(x) = \int f(x)\,dx$$

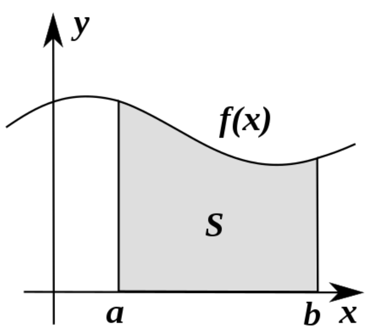
Stammfunktion

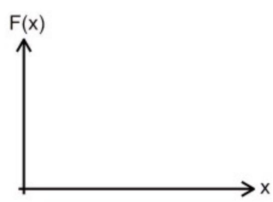
Der **Hauptsatz der Integralrechnung** besagt (vereinfacht, genauer in Ana / KomA), dass für jede Funktion f für welche eine Stammfunktion existiert, dessen Integral wie folgt berechnet werden kann:

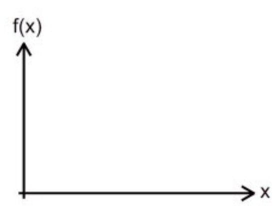
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Wobei a, b die **Integrationsgrenzen** sind.

Eine gute Interpretation des Integrals ist, dass sie den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion f im Integrationsbereich von a bis b darstellt:







Einige wichtige Integrale:

Polynome: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ $\quad n \in \mathbb{N}$

⚠ Wenn keine Grenzen: Integrationskonstante nicht vergessen!

Exponentialfunktion: $\int e^x\,dx = e^x + C$, $\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

Trig.funktionen: $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$, $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

$\int \sin(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + C$, $\int \cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + C$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

↪ mehr in Ana / KomA :) (für ITET)

Wichtig: **Linearität vom Integral:**

Seien $f(x)$ & $g(x)$ integrierbare Fkt. mit Stammfkt. $F(x)$ & $G(x)$ und α, β Konstanten $\in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\, dx = \alpha \cdot (F(b) - F(a)) + \beta \cdot (G(b) - G(a))}$$

Beispiele: $\int 3x^2 + 5\ dx = \int 3x^2\, dx + \int 5\, dx = 3 \cdot \int x^2\, dx + \int 5\, dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 5x = x^3 + 5x + C$

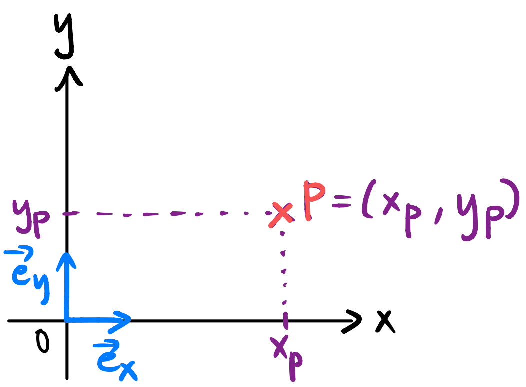
$\int (5x \cdot (x+1))\, dx = \int (5x^2 + 5x)\, dx = \int 5x^2\, dx + \int 5x\, dx = 5 \cdot \int x^2\, dx + 5 \cdot \int x\, dx = \frac{5}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + C$

$$\int aspiri\ dn =$$

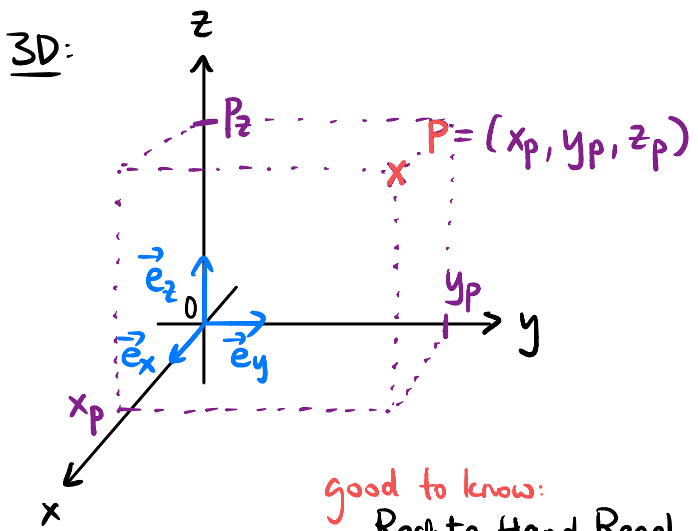
Koordinatensysteme

① kartesische Koordinaten:

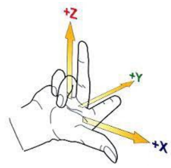
2D:



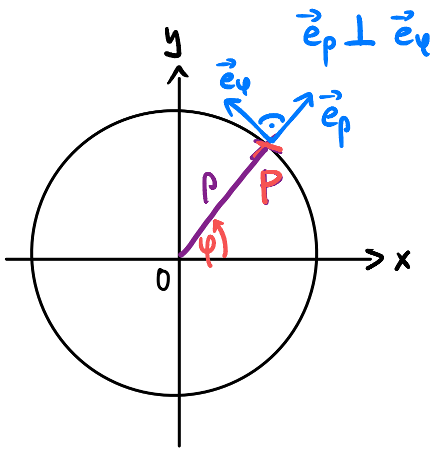
3D:



good to know:
Rechte Hand Regel beachten.



② Polarkoordinaten (nur 2D):



ρ ("rho") beschreibt den Radius.

Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y$$

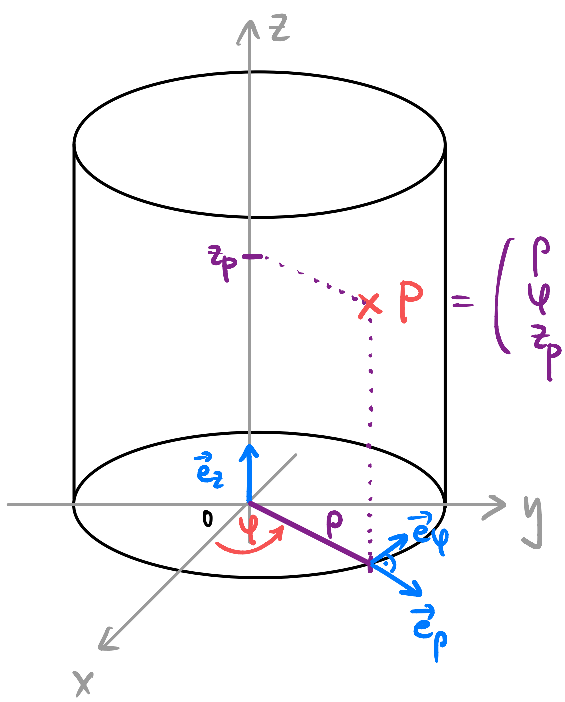
Umrechnung:

Polar → kartesisch	kartesisch → Polar
$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$	⊛ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

⊛ Für φ: Fallunterscheidung:

- falls $x, y > 0$: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
- falls $x < 0$, y beliebig: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180°$
- falls $x > 0, y < 0$: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 360°$

③ Zylinderkoordinaten:



$$P = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z_P \end{pmatrix}$$

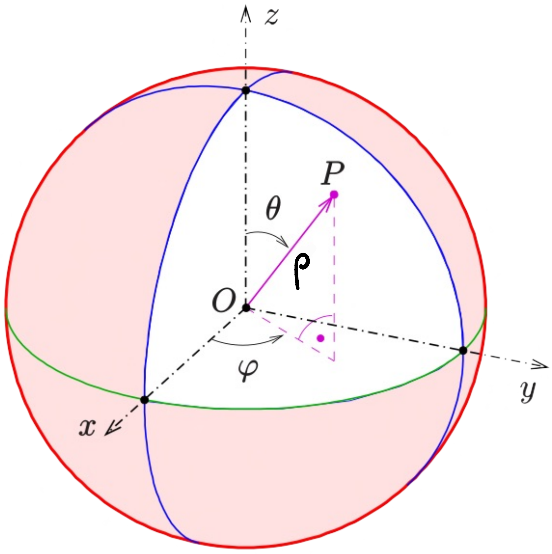
$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y$$

Umrechnung:

Zylinder → kartesisch	kartesisch → Zylinder
$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$	⊛ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$

9

④ Kugelkoordinaten (nicht wichtig in TechMech aber z.B. in NuS schon :))



$$P = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Umrechnung:

Kugel → Kartesisch	Kartesisch → Kugel
$x = \rho \cdot \sin(\theta)\cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = \rho \cdot \cos(\theta)$	$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$

Andere nützliche mathematische Formeln

(Kamen mal in den Serien vor)

Kreuzprodukt: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\forall$ Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt:

Bilinearität:
$$\vec{a} \times (\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \times \vec{c})$$
$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \times \vec{c} = \alpha(\vec{a} \times \vec{c}) + \beta(\vec{b} \times \vec{c})$$
$$\Rightarrow \vec{a} \times (\beta\vec{b}) = \beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\beta\vec{a}) \times \vec{b}$$
$$\Rightarrow (\alpha\vec{a}) \times (\beta\vec{b}) = \alpha\beta(\vec{a} \times \vec{b}) = (\beta\vec{a}) \times (\alpha\vec{b})$$

Skalare darf man raus/reinnehmen in das Kreuzprodukt!

⚠ Antikommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ nicht $\vec{a} \times \vec{b} \overset{\lightning}{=} \vec{b} \times \vec{a}$! $\lightning$

Grassmann-identität: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

bzw.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

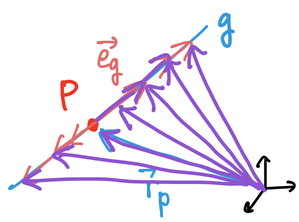
Geraden beschreiben in Vektorform

Eine Gerade wird mathematisch so beschrieben: $g: \boxed{\vec{r}(\alpha) = \vec{r}_p + \alpha \cdot \vec{e}_g}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

unsere "Laufvariable" α nimmt alle Zahlen $\in \mathbb{R}$ ein

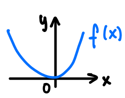
Ortsvektor zu IRGENDEIN Punkt auf der Geraden

Einheitsvektor in Richtung der Gerade

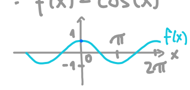


Funktionen: Streckung, Stauchung, Verschiebung, Spiegelung math. beschreiben:

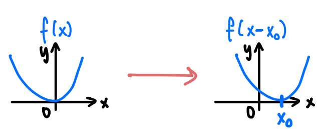
Sei $f(x)$ eine gegebene Funktion:



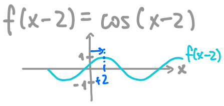
Bsp. : $f(x) = \cos(x)$



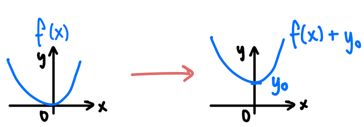
Translation in x: $f(x) \longrightarrow f(x - x_0)$



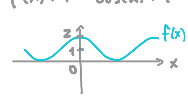
$f(x-2) = \cos(x-2)$



Translation in y: $f(x) \longrightarrow f(x) + y_0$

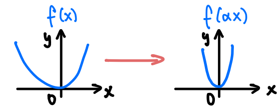


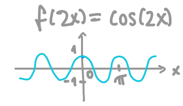
$f(x) + 1 = \cos(x) + 1$



Streckung / Verstauchung um x: $f(x) \longrightarrow f(\alpha x)$

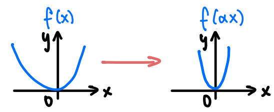
$\alpha < 0$ $\alpha > 0$

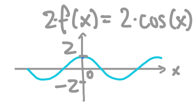




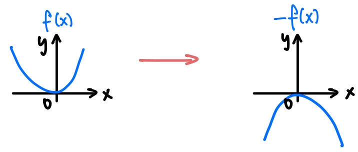
Streckung / Verstauchung um y: $f(x) \longrightarrow \alpha \cdot f(\alpha x)$

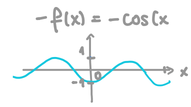
$\alpha < 0$ $\alpha > 0$



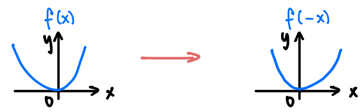


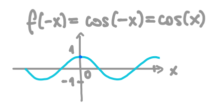
Spiegelung um x: $f(x) \longrightarrow -f(x)$





Spiegelung um y: $f(x) \longrightarrow f(-x)$

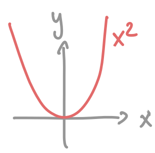




Bei Verschachtelungen: $f(\alpha x + \beta) = f\left(\alpha \cdot \left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right) = \underbrace{f(\alpha \cdot (x - x_0))}_{\text{in diese Form bringen.}}$, wobei $x_0 := -\frac{\beta}{\alpha}$

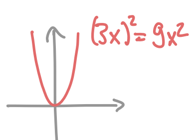
Dann: $\underbrace{\text{zuerst spiegeln / strecken um } \alpha}_{1}$, $\underbrace{\text{dann um } x_0 \text{ verschieben}}_{2}$.

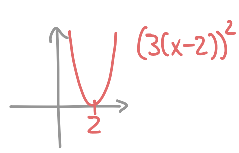
Bsp: $f(x) := x^2$



Skizziere $g(x) := f(3x - 6)$

$\longrightarrow g(x) = f\left(3 \cdot \left(x - \frac{6}{3}\right)\right) = f(\underset{\alpha}{3} \cdot (x - \underset{x_0}{2}))$





1 $f(3x)$ zeichnen

2 dann diese Fkt. um $x_0 = 2$ verschieben