Geraden und Ebenen

[Vektorgeometrie]

Armin P. Barth

ETH zürich

Computerspiele und Vektorgeometrie

Landschaften wechseln in schnellem Rhythmus, Figuren und Gegenstände fliegen herum, Licht und Schatten bringen Tiefe in die artifizielle Welt von Computerspielen. Gegenstände wie Gebirge, Gebäude, Roboter oder Raumschiffe sind auf der Programmierebene einfache geometrische Objekte: Ebenen, Würfel, Kugeln, Zylinder. Oberflächen werden aus unzähligen kleinen Dreiecken zusammengesetzt. Die Geometrie sorgt also für die Formen, und die lineare Algebra und die Analysis, beides zentrale mathematische Gebiete, sorgen für Bewegungsabläufe. Die Mathematik ist der Baukasten und gleichzeitig der Treibstoff für die künstliche Welt. Um einen allfälligen Zusammenprall zweier Objekte zu überprüfen, wird im Hintergrund ein Schnittproblem gelöst, etwa aus einer Geraden und einem Ausschnitt einer Ebene. Mit „Raytracing“ werden Lichteinfälle, Spiegelungen und Schattenwürfe berechnet, und das ist nichts anderes als Vektorgeometrie. Es sorgen also unter anderem Methoden der Vektorgeometrie dafür, dass in Computerspielen die gewünschten Aktionen ablaufen.

In der Tat gibt es zahlreiche Anwendungen der Vektorgeometrie. Computerspiele sind nur eine, GPS eine andere, Flugsimulatoren eine weitere. Nicht selten finden auf der Programmierebene Berechnungen an einfachen geometrischen Objekten statt: Punkten, Vektoren, Geraden, Ebenen, Kugeln, und so weiter. Und das ist mit ein Grund dafür, dass wir uns nun genau mit diesen Objekten auseinandersetzen.

Geraden

Fragen wir uns zuerst, wie man eine Gerade in der Anschauungsebene oder dem Anschauungsraum durch eine Gleichung ausdrücken kann. Von früher bekannt ist, dass jede nicht-vertikale Gerade in $\mathbb{R}^2$ Graph einer linearen Funktion ist, so dass also mit einer Gleichung der Art

$$y = p \cdot x + q \tag{$\star$}$$

gearbeitet werden kann, wobei p die Steigung und q der y-Achsenabschnitt ist. Den Nachteil, dass damit vertikale Geraden nicht darstellbar sind, können wir leicht beheben, indem wir Gleichungen der Art

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \tag{$\star\star$}$$

verwenden. Hier kann man ja zwei Fälle unterscheiden: Falls $b \neq 0$ ist, können wir die Gleichung ($\star\star$) nach y auflösen und erhalten eine lineare Funktion der Art ($\star$):

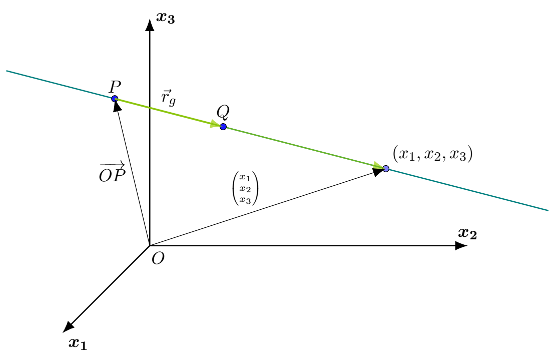
$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{b} \cdot x + \left(-\frac{c}{b}\right) \\ &= p \cdot x + q, \end{aligned}$$

also eine nicht-vertikale Gerade. Falls aber $b = 0$ (und $a \neq 0$) ist, erhalten wir eine Gleichung der Art

$$a \cdot x + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{c}{a}$$

und eine solche stellt eine vertikale Gerade dar. Daher funktioniert ($\star\star$) hervorragend, um Geraden in $\mathbb{R}^2$ auszudrücken. Stellt man eine Gerade in dieser Form dar, so nennt man das eine *Koordinatengleichung*. Leider gibt es in $\mathbb{R}^3$ nichts Vergleichbares. Wollen wir eine Gerade im Anschauungsraum durch eine Gleichung ausdrücken, so gibt es keine zu ($\star\star$) „ähnliche“ Gleichung, die das schaffen könnte. Glücklicherweise bietet die Vektorgeometrie einen eleganten Ausweg: Dank Vektoren ist es nicht nur leicht, eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ auszudrücken, die Idee lässt sich sogar mühelos nach $\mathbb{R}^2$ und sogar nach $\mathbb{R}^n$ übertragen. Diese Idee soll hier erläutert werden:

Zunächst: Eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist durch die Angabe von zwei Punkten eindeutig bestimmt. Wir denken uns also, dass uns zwei verschiedene Punkte P und Q gegeben sind und wir bemüht sind, die Gerade g durch diese beiden Punkte mittels einer Gleichung zu erfassen. Der Vektor $\vec{r}_g := \overrightarrow{PQ}$ gibt uns die Richtung der Geraden an und heisst darum *Richtungsvektor* von g.



Wenn wir uns im Punkt P befinden, so können wir jeden anderen Punkt der Geraden erreichen, indem wir den Richtungsvektor geeignet strecken oder stauchen, also mit einem reellen Streckfaktor t versehen. Als Vektoraddition ausgedrückt, heisst das, dass

$$\overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{r}_g$$

in jedem Fall, also für jedes reelle t, den Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden liefert. Ist $t > 1$, so erreichen wir Punkte „rechts“ von Q (bezogen auf obige Abbildung), wird der Parameter t auf $0 \leqslant t \leqslant 1$ eingeschränkt, so durchläuft der Vektor genau die abgeschlossene Strecke von P bis Q. Und für $t < 0$ erreichen wir Punkte „links“ von P.

Wir erhalten also die Menge aller Ortsvektoren zu Punkten der Geraden, wenn wir t alle reellen Zahlen durchlaufen lassen. Dies ist somit unsere gesuchte Gleichung:

Definition:
Seien P und Q zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, und sei g die Gerade durch diese beiden Punkte. Dann liefert

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (x_3) \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{r}_g$$

*für $t \in \mathbb{R}$ die Menge aller Ortsvektoren zu Punkten der Geraden. Eine Gleichung dieser Art heisst **Vektorgleichung** oder **Parametergleichung** der Geraden g.*

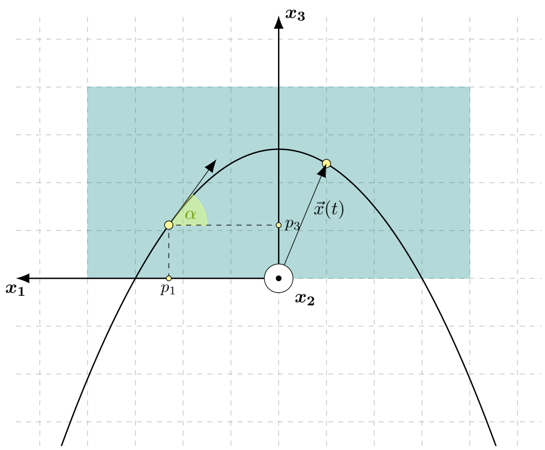
Dass eine Gerade und nicht etwa eine gekrümmte Kurve durchlaufen wird, liegt an der Linearität dieser Gleichung. Zum Vergleich soll hier noch eine Parametergleichung einer gekrümmten Kurve gezeigt werden, nämlich eine Wurfparabel:

Wenn wir eine Wurfparabel in der (x_1, x_3)-Ebene nach der Zeit t parametrisieren und mit den Konstanten v (Startgeschwindigkeit), g (Erdbeschleunigung) und α (Abwurfwinkel) versehen, so entsteht die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -v \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \\ v \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g/2 \end{pmatrix}.$$

Und sie liefert natürlich alle Ortsvektoren zu

Punkten einer Parabel, mithin also eine gekrümmte Kurve.



FAQs zu Geraden

Wir wollen nun den Umgang mit der Vektorgleichung für Geraden üben, indem wir uns Fragen widmen, die in Vektorgeometrie-Aufgaben besonders häufig anzutreffen sind.

„Liegt ein Punkt auf einer Geraden?“

Wir arbeiten zuerst in der Anschauungsebene. Ob zum Beispiel der Punkt $(-3, 7)$ auf der Geraden $g : 5x+3y-6 = 0$ liegt oder nicht, lässt sich ganz einfach entscheiden, indem man überprüft, ob durch Einsetzen der Werte $x = -3$ und $y = 7$ eine wahre Aussage entsteht oder nicht. Hier ist das der Fall, denn $5 \cdot (-3) + 3 \cdot 7 - 6$ ist in der Tat gleich Null. Ergäbe dieser Term nicht Null, so läge der Punkt offenbar nicht auf der Geraden.

Wie genau läuft diese Entscheidung ab, wenn man mit der Vektorgleichung arbeitet? Seien dazu eine Gerade

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (x_3) \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{r}_g,$$

sowie ein Punkt $R\,(r_1, r_2, (r_3))$ gegeben. Offenbar liegt R genau dann auf g, wenn es einen Parameter t gibt, so dass

$$\overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{r}_g = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ (r_3) \end{pmatrix}$$

Betrachten wir ein Beispiel:

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

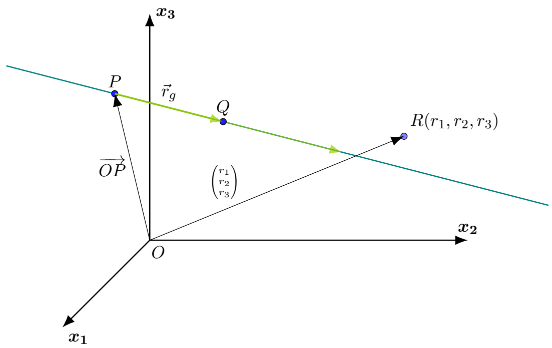
Liegt der Punkt $R(15, 10, 16)$ auf g? Es gilt $R \in g$ genau dann wenn ein $t \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Es müssten also drei Gleichungen simultan erfüllt sein, nämlich

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & 7 + 2 \cdot t & = & 15 \\ \mathrm{II} & -2 + 3 \cdot t & = & 10 \\ \mathrm{III} & 5 + 3 \cdot t & = & 16. \end{array}$$

Wie man leicht sieht, ist dieses System nicht erfüllbar. In (I) und (II) funktioniert zwar $t = 4$, aber dieser Parameterwert erfüllt nicht die dritte Gleichung. Folglich liegt der Punkt ausserhalb der Geraden.



„Wie bringt man eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ in die jeweils andere Form?"

In $\mathbb{R}^2$ gibt es zwei Arten von Geradengleichungen: die Vektorgleichung und die Koordinatengleichung. Es stellt sich darum die Frage, wie man - wenn nötig - die eine in die andere umformen kann. Das ist überaus einfach, und wir zeigen das hier anhand von zwei Beispielen:

Zuerst betrachten wir die Gerade in der Anschauungsebene, die durch die Gleichung

$$g : 5x + 3y - 6 = 0$$

geben ist. Um eine Vektorgleichung für diese Gerade zu finden, benötigen wir zwei Punkte auf der Geraden. Dabei sind wir völlig frei, wir haben die Wahl aus unendlich vielen Punkten. Wir wählen hier zum Beispiel die Punkte $P(3, -3)$ und $Q(0, 2)$. Dann lässt sich diese Gerade also auch durch die folgende Vektorgleichung darstellen:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Der Orts- und der Richtungsvektor hängt von den gewählten Punkten ab; das heisst, die Vektorgleichung könnte auch ganz andere Zahlen enthalten und trotzdem dieselbe Gerade darstellen.

Sei nun umgekehrt eine Gerade durch eine Vektorgleichung gegeben, etwa durch

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Wie bestimmen wir für diese Gerade eine Koordinatengleichung? Zunächst kann man aus dem Richtungsvektor leicht die Steigung der Geraden herauslesen - falls dieser nicht zufällig parallel zur y-Achse verläuft. In unserem Beispiel ist die Geradensteigung gleich $-2/4 = -1/2$. Also ist

$$g : y = -\frac{1}{2} \cdot x + q.$$

Den noch fehlenden y-Achsenabschnitt bestimmt man leicht, indem man einen Punkt der Geraden einsetzt, etwa den Punkt $(5, 1)$. Daraus finden wir die Koordinatengleichung

$$g : y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$$

beziehungsweise

$$g : x + 2y - 7 = 0.$$

„Wie eintscheidet man, ob zwei Geraden parallel sind?"

Zwei Geraden

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{r}_g$$

und

$$h : \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{r}_h$$

seien gegeben. Sie sind genau dann parallel, wenn der eine Richtungsvektor ein Vielfaches des anderen ist, wenn also $\vec{r}_h = \lambda \vec{r}_g$ für eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$. Beispielsweise sind die beiden folgenden Geraden sicher parallel:

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

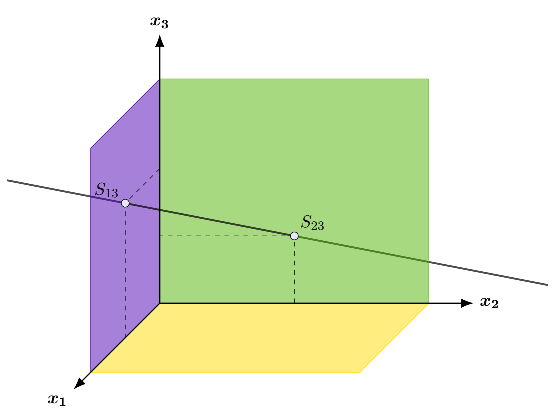
und

$$h: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix},$$

weil der Richtungsvektor von h das minus Zweifache des Richtungsvektors von g ist.

„Wir berechnet man die Spurpunkte einer Geraden?“

Im dreidimensionalen Kartesischen Koordinatensystem gibt es drei Grundebenen, die durch jeweils zwei Koordinatenachsen aufgespannt werden. Als Spurpunkte einer Geraden bezeichnet man diejenigen Punkte S_{12}, S_{13}, S_{23} in denen die Gerade diese Grundebenen schneidet - wenn überhaupt. Die abgebildete Gerade schneidet die von der x_1- und der x_3-Achse aufgespannte Ebene im Punkt S_{13}, die von der x_2- und der x_3-Achse aufgespannte Ebene im Punkt S_{23} und irgendwo ausserhalb des abgebildeten Ausschnittes auch noch die „Boden-Ebene“ im Punkt S_{12}. Wie bestimmt man diese speziellen Schnittpunkte?



Wir untersuchen das Beispiel

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Im Spurpunkt S_{12} verschwindet die dritte Koordinate; dort muss also

$$x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5 + 3 \cdot t = 0$$

gelten. Daraus errechnen wir sofort den Parameter $t = -5/3$. Bestimmt man mit diesem Parameter auch noch die anderen beiden Komponenten, so erhält man den ersten Spurpunkt:

$$\overrightarrow{OS_{12}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

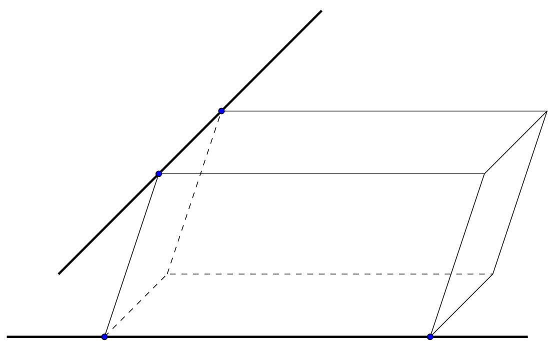
$$S_{12} = \left(\frac{11}{3}, -7, 0\right).$$

Die beiden anderen Spurpunkte findet man analog, indem man jeweils eine Komponente gleich Null setzt.

In $\mathbb{R}^2$ sind die Spurpunkte einer Geraden natürlich die Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen. Wie man diese bestimmt, ist von früher hinlänglich bekannt.

„Wie berechnet man den allfälligen Schnittpunkt zweier Geraden?“

Während zwei Geraden in der Anschauungsebene sich immer schneiden, wenn sie nicht parallel sind, gibt es im Anschauungsraum eine Möglichkeit mehr: Zwei Geraden können dann auch *windschief* sein, also nicht parallel und sich trotzdem nicht schneidend. In diesem Fall kann man keine Ebene finden, welche beide Geraden enthält.



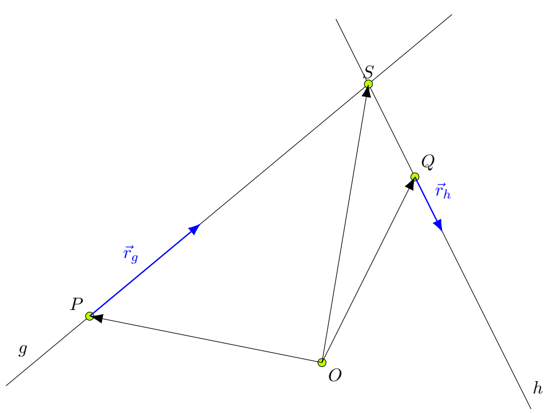
In der Abbildung ist ein Parallelepiped gezeichnet, um für das Auge deutlich zu machen, dass sich die beiden Geraden nie schneiden. Wir fragen uns nun, wie man einen allenfalls existierenden Schnittpunkt zweier Geraden rechnerisch bestimmen kann. Seien dazu zwei Geraden

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{r}_g$$

und

$$h : \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{r}_h$$

gegeben. Salopp gesagt: Ein Schnittpunkt S existiert genau dann, wenn es zwei Streckfaktoren s und t gibt, so dass man an denselben Ort gelangt, wenn man auf g von P aus den gestreckten Richtungsvektor „nimmt" und wenn man auf h von Q aus den (mit dem anderen Faktor) gestreckten Richtungsvektor nimmt.



Genauer: Ein Schnittpunkt existiert genau dann, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ und ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{r}_g = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{r}_h$$

Die Abbildung macht ganz deutlich, dass man keinesfalls voraussetzen darf, dass bei beiden Geraden derselbe Streckfaktor benötigt wird. Man muss also unbedingt zwei verschiedene Buchstaben für die beiden Parameter verwenden. (In der Abbildung wäre s positiv und t negativ.)

Wir untersuchen sogleich ein Beispiel: Haben die beiden folgenden Geraden einen Schnittpunkt?

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

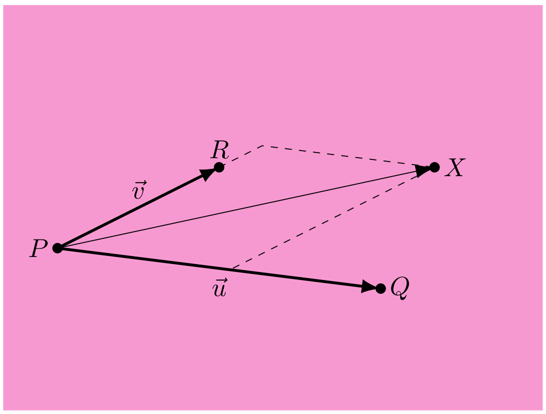
Ein Schnittpunkt existiert genau dann wenn $s, t \in \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 0 + 3 \cdot s & = & 1 + 0 \cdot t \\ \text{II} & 0 + 4 \cdot s & = & 1 - 3 \cdot t \\ \text{III} & 6 - s & = & 1 + 2 \cdot t. \end{array}$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem, so findet man, dass es singulär mit leerer Lösungsmenge ist. Die beiden Geraden schneiden sich also nicht, und da sie auch nicht parallel sind, verlaufen sie folglich windschief.

Ebenen

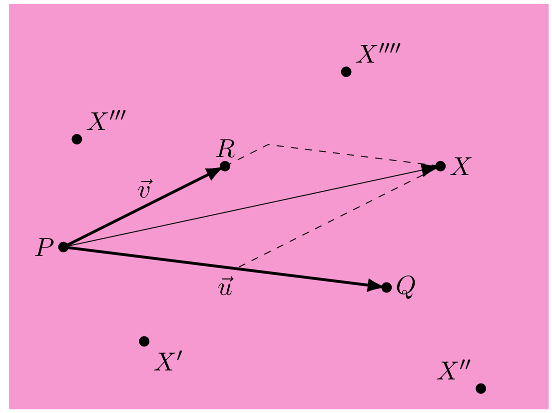
Die Untersuchung von Ebenen ist nur in $\mathbb{R}^3$ sinnvoll. Eine Ebene ist eindeutig bestimmt durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Stellen wir uns einmal vor, dass wir nun auf eine solche Ebene, gebildet aus den drei Punkten P, Q und R, die nicht auf einer Geraden liegen, herabsehen:



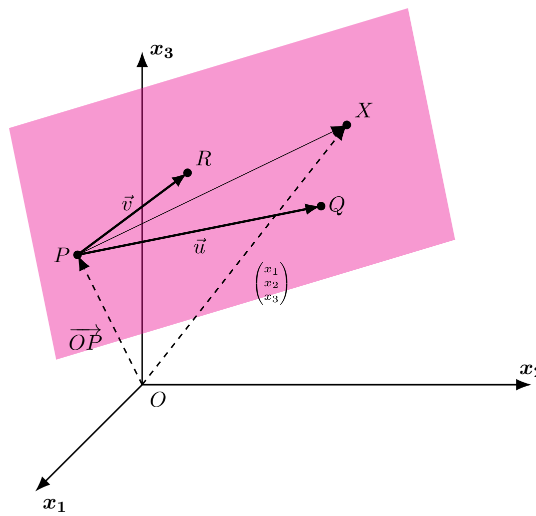
Sei zudem X ein beliebiger Punkt auf derselben Ebene. Die Abbildung macht deutlich, dass der Vektor $\overrightarrow{PX}$ als Linearkombination der beiden gegebenen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ geschrieben werden kann. Darunter verstehen wir Folgendes: Es ist möglich, die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ so zu strecken/stauchen, dass durch Vektoraddition daraus der gesuchte Vektor $\overrightarrow{PX}$ entsteht. Noch genauer: Es gibt genau ein $s \in \mathbb{R}$ und ein $t \in \mathbb{R}$, so dass

$$\overrightarrow{PX} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

gilt. Und natürlich trifft das nicht nur für den eingezeichneten Punkt X zu, sondern für jeden Punkt der Ebene:



Nehmen wir nun an, die Ebene liegt irgendwie im Anschauungsraum, und wir sind bestrebt, die Ebene durch eine Gleichung auszudrücken.



Wir fragen uns also wie bei den Geraden, wie man wohl jeden Ortsvektor zu einem Punkt der Ebene mit Hilfe der gegebenen Dinge ausdrücken kann. Gemäss Vektoraddition gilt offenbar

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}.$$

Und da man $\overrightarrow{PX}$ auf eindeutige Weise als Linearkombination der beiden Richtungsvektoren

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$ schreiben kann, folgt: Für einen beliebigen Punkt $X(x_1, x_2, x_3)$ der Ebene gibt es genau zwei Parameter s und t, so dass

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR}.$$

Merke:

Seien P, Q und R drei Punkte in $\mathbb{R}^3$, die nicht auf einer Geraden liegen, und sei E die Ebene, die durch diese drei Punkte führt. Dann liefert

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR}$$

für $s, t \in \mathbb{R}$ die Menge aller Ortsvektoren zu Punkten der Ebene. Eine Gleichung dieser Art heisst **Vektorgleichung** oder **Parametergleichung** der Ebene E.

Beispiel: Gegeben seien die drei Punkte $P(2, 0, 3)$, $Q(5, 5, -1)$ und $R(0, 0, 7)$. Wie man leicht verifiziert, liegen die Punkte nicht auf einer Geraden; sie definieren folglich eine Ebene im Anschauungsraum. Diese Ebene kann wie folgt durch eine Gleichung ausgedrückt werden:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Koordinatengleichung einer Ebene

Bleiben wir noch einen Moment bei der obigen Beispiel-Ebene. Anstelle der Vektorgleichung können wir drei Gleichungen für die einzelnen Komponenten notieren:

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & x_1 & = & 2 + 3 \cdot s - 2 \cdot t \\ \mathrm{II} & x_2 & = & 0 + 5 \cdot s + 0 \cdot t \\ \mathrm{III} & x_3 & = & 3 - 4 \cdot s + 4 \cdot t. \end{array}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem in drei Gleichungen und fünf Unbekannten. Da es linear ist, werden beim klassischen Substitutionsverfahren (oder der Gauss-Elimination) alle Gleichungen linear bleiben. Indem wir das System also schrittweise reduzieren und dabei die Unbekannten s und t eliminieren, erhalten wir am Ende eine einzige lineare Gleichung in den Unbekannten x_1, x_2, x_3. Unsere Vektorgleichung lässt sich also reduzieren auf eine Gleichung der Art

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0.$$

Mit den Zahlen im Beispiel ergäbe sich die Gleichung

$$10 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 - 35 = 0.$$

Das ist eine sogenannte *Koordinatengleichung* der Ebene. Ihre Lösungsmenge ist gerade die Menge aller 3-Tupel (x_1, x_2, x_3), welche auf der Ebene liegen.

Merke:

Eine lineare Gleichung der Art

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$$

hat als Lösungsmenge eine Ebene und heisst **Koordinatengleichung** ebendieser Ebene.

Spezialfälle:

Ist $d = 0$, so enthält die Ebene den Origo.

Ist $b = c = d = 0$ (und $a \neq 0$), so beschreibt die Gleichung $x_1 = 0$ gerade die von der x_2- und der x_3-Achse aufgespannte Ebene. Analoges gilt für die anderen Grundebenen.

Was ist, wenn genau einer der Koeffizienten a, b, c gleich 0 ist? Nehmen wir an, es ist $a = 0$. Sucht man dann den allfälligen Schnittpunkt der Ebene $b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$

mit der x_1-Achse, so findet man keinen, falls $d \neq 0$ ist, oder sonst unendlich viele. Mit anderen Worten, die Ebene ist parallel zur x_1-Achse oder enthält diese sogar. Und analog für die anderen Komponenten.

Wir wenden uns nun einigen besonders häufigen Fragen im Zusammenhang mit Ebenen zu.

FAQs zu Ebenen

„Liegt ein Punkt auf einer Ebene?“

Wir fragen, ob ein bestimmter Punkt U auf einer bestimmten Ebene E liegt oder nicht. Ist die Ebene durch eine Koordinatengleichung gegeben, so ist das trivial: Man setzt einfach die Koordinaten von U in x_1, x_2, x_3 ein und überprüft, ob dadurch eine wahre Aussage entsteht oder nicht. Ist die Ebene durch eine Vektorgleichung gegeben, so überprüft man, ob zwei reelle Zahlen s und t existieren, so dass

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR}$$

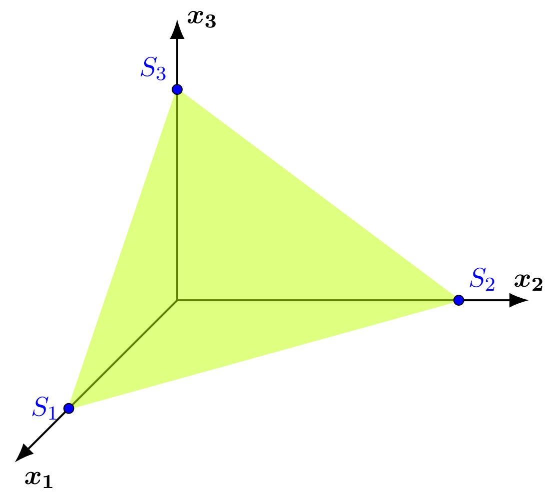
gilt.

„Wie bringt man eine Ebene in die jeweils andere Form?“

Wir fassen uns hier sehr kurz und überlassen die einfachen Verifikationen den interessierten Leserinnen und Lesern. Ist die Ebene durch eine Koordinatengleichung gegeben, so wählt man nach Belieben drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen und setzt damit die Vektorform an. Ist umgekehrt die Ebene durch eine Vektorgleichung gegeben, so reduziert man das lineare Gleichungssystem aus den drei Komponentengleichungen zu einer einzigen linearen Gleichung in den Unbekannten x_1, x_2, x_3.

„Wie bestimmt man die Spurpunkte?“

Als Spurpunkte einer Ebene bezeichnet man die allfälligen Durchstosspunkte der drei Koordinatenachsen durch die Ebene.



In jedem Spurpunkt gilt, dass zwei der drei Komponenten x_1, x_2, x_3 Null sind. Die Koordinatengleichung der Ebene eröffnet darum eine besonders einfache Möglichkeit, die Spurpunkte zu bestimmen. Ist zum Beispiel

$$E : 10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 35 = 0,$$

so gilt für den ersten Spurpunkt, dass $x_2 = x_3 = 0$ und somit $x_1 = 3.5$ ist. Daraus ergibt sich der erste Spurpunkt $S_1(3.5, 0, 0)$. Analog findet man auch die restlichen Spurpunkte.

Denkt man an Spurpunkte, so kann einem die folgende schöne Idee in den Sinn kommen. Angenommen, wir kennen von einer Ebene E die Spurpunkte $S_1(A, 0, 0)$, $S_2(0, B, 0)$ und $S_3(0, 0, C)$. Dann kann man eine Koordinatengleichung für die Ebene sofort mühelos hinschreiben:

$$E : \frac{1}{A}x_1 + \frac{1}{B}x_2 + \frac{1}{C}x_3 - 1 = 0.$$

„Wie bestimmt man den allfälligen Schnittpunkt von einer Geraden und einer Ebene?“

Nehmen wir an, eine Ebene und eine Gerade sind gegeben:

$$E : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Falls es einen Schnittpunkt gibt, so gibt es genau einen Ortsvektor, welcher beide Gleichungen simultan erfüllt. Das heisst, es existiert dann je ein s, t und u, so dass

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem, so zeigt sich, ob ein Schnittpunkt existiert oder nicht. In diesem Fall ist das System regulär, und man findet $s = 1$, $t = 3$ und $u = -2$. Durch Einsetzen von entweder u in die Geradengleichung oder von s und t in die Ebenengleichung findet man dann den Schnittpunkt $(3, 8, 7)$.

Ein anderer gangbarer Weg besteht darin, zuerst eine Koordinatengleichung für die Ebene herzustellen. Man erhält in unserem Beispiel

$$E : 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 17 = 0.$$

Über die drei Komponenten x_1, x_2, x_3 weiss man aus der Geradengleichung, dass sie die folgenden Gleichungen erfüllen müssen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 + 2u \\ x_2 &= 6 - u \\ x_3 &= 3 - 2u. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Informationen in die Ebenengleichung findet man sofort den Parameter u:

$$\begin{aligned} & 2(7 + 2u) - 2(6 - u) - (3 - 2u) + 17 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & u = -2. \end{aligned}$$

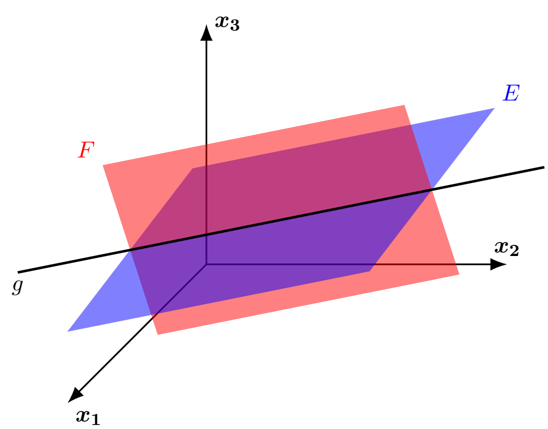
Und wiederum ergibt sich daraus der gesuchte Schnittpunkt.

„Wie bestimmt man die allfällige Schnittgerade zweier Ebenen?“

Angenommen, es liegen zwei Ebenen vor, und wir möchten wissen, ob sie sich in einer Geraden schneiden und wie diese Geraden gegebenenfalls durch eine Gleichung beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} E &: x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \\ F &: 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Mit etwas mehr Vektorgeometrie (vgl. das nachfolgende Skript) kann man auf einen Blick erkennen, dass diese Ebenen nicht parallel sind und sich also tatsächlich in einer Geraden schneiden. Wie können wir für diese Gerade eine Gleichung finden? Dazu benötigen wir offenbar zwei Punkte.



Ein einfacher Weg bezieht seine Kraft aus folgender bestechender Idee: Wenn nicht gerade zufällig die Schnittgerade g parallel zur x_2-x_3-Ebene verläuft, dann wird die Schnittgerade „bei jeder reellen x_1-Komponente genau einmal vorbeikommen“. Anders gesagt, es muss dann genau einen Punkt auf g geben mit $x_1 = 0$, genau einen $x_1 = 1$ und so weiter. Wir können also gezielt nach diesem Punkten suchen:

$x_1 = 0$

Dann findet man aus den Ebenengleichungen

$$\begin{aligned} -2x_2 + 2x_3 - 1 &= 0 \\ -3x_2 - x_3 + 2 &= 0, \end{aligned}$$

und daraus $x_2 = 3/8$ und $x_3 = 7/8$. Also liegt der Punkt $(0, 3/8, 7/8)$ sicherlich auf der Schnittgeraden.

$x_1 = 1$

Hier findet man aus den Ebenengleichungen

$$\begin{aligned} 1 - 2x_2 + 2x_3 - 1 &= 0 \\ 2 - 3x_2 - x_3 + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_2 - x_3 &= -4, \end{aligned}$$

woraus folgt $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$. Also liegt der Punkt $(1, 1, 1)$ ebenfalls auf der Schnittgeraden.

Nun da wir zwei Punkte kennen, können wir sofort eine Gleichung für die Schnittgerade ansetzen:

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

Wir haben gesagt, dass das nur geht, wenn nicht gerade zufällig die Schnittgerade g parallel zur x_2-x_3-Ebene verläuft. Ist das ein Problem? Nein, gar nicht, denn sie kann nicht parallel zu jeder der drei Grundebenen verlaufen, höchsten zu zwei. Wir finden also in jedem Fall eine Koordinate, die wir im oben beschriebenen Sinne variieren können.