Grundlagen

[Vektorgeometrie]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Hermann_Grassmann

Vektoren – etwas ganz Überflüssiges?

„Auf diesen Begriff kann man ganz verzichten. Zur Klarheit oder Vereinfachung der Geometrie trägt er nichts bei, weder im zweidimensionalen noch im dreidimensionalen Raum.“

So vernichtend urteilte noch Ende des 19. Jahrhunderts der britische Physiker *Lord Kelvin* über den Begriff des *Vektors*, und er war mit dieser Kritik nicht allein. Er hätte sich stärker nicht täuschen können, denn heute sind Vektoren aus der Mathematik und Physik nicht mehr wegzudenken; sie haben beide Disziplinen sehr befruchtet und haben unzählige Anwendungen gefunden.

Als Begründer der Vektorrechnung wird heute der Stettiner Gymnasiallehrer *Hermann Günther Grassmann* (1809 – 1877) angesehen; sein Lebenswerk legte das Fundament zur Vektorrechnung.

Abbildung 1: Hermann Günther Grassmann

Skalar oder vektoriell

Ganz zentral bei Vektoren ist, dass wir gut unterscheiden können zwischen skalaren Grössen und vektoriellen Grössen. Kurz und bündig: Eine *skalare Grösse* hat einen Zahlwert und (meist auch) eine zugehörige Einheit. Eine *vektorielle Grösse* dagegen enthält darüber hinaus noch eine Richtungsinformation.

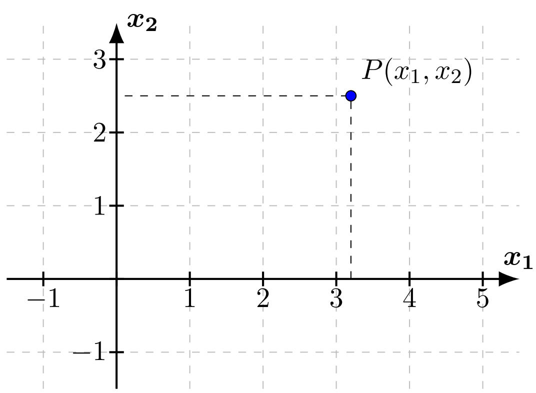
Die Temperatur ist ein gutes Beispiel für eine skalare Grösse. Ein Thermometer zeigt jetzt gerade vielleicht 18° C an; die Grösse besteht also aus dem Zahlwert 18 und der Einheit Celsius. Eine Richtung kann der Temperatur natürlich nicht zugeordnet werden. Entfernung ist ebenfalls eine skalare Grösse. So hat etwa der Mond eine Entfernung von 384′000 km von der Erde. Dabei ist 384′000 der Zahlwert und Kilometer die Einheit. Die relative Orientierung der beiden „Körper“ zueinander spielt bei dieser Angabe keine Rolle. Der Betrag der Geschwindigkeit (oft auch „Tempo“ genannt) ist ebenfalls skalar; die Tempolimite von 50 km/h innerorts ist ja nicht abhängig davon, in welche Richtung man fährt.

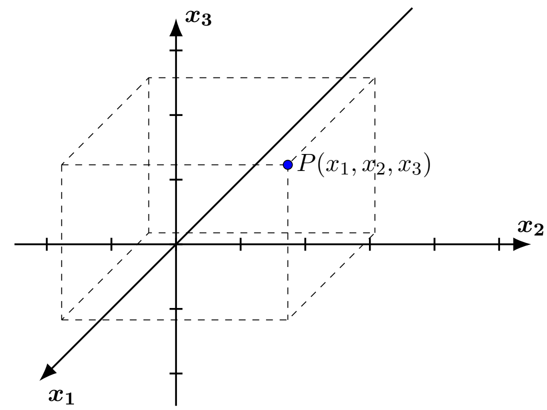
Dagegen ist die Geschwindigkeit im physikalischen Sinne eine vektorielle Grösse, weil nebst ihrem Betrag immer auch ihre Richtung eine Rolle spielt. Die (physikalische) Kraft ist das Paradebeispiel einer vektoriellen Grösse: Das Gewicht einer Masse von 1 kg auf der Erdoberfläche ist eine Kraft vom Betrag $F = 9.81$ N. Diese Kraft hat aber eine Richtung: Sie zeigt immer zum Erdmittelpunkt. Zur Kennzeichnung einer vektoriellen Grösse werden meist kleine Pfeile verwendet:

$$\vec{v}, \vec{w}, \vec{F}, \ldots$$

Was ist ein Vektor

Bevor wir definieren, was man genau unter einem Vektor versteht, sollten wir ganz klar sagen, wo wir diese Vektoren „ansiedeln“ werden. Wir beschränken und hier auf die sogenannte *Anschauungsebene* $\mathbb{R}^2$ und den *Anschauungsraum* $\mathbb{R}^3$. Damit meinen wir die geometrischen Idealisierungen der Tischebene, auf der wir arbeiten und des physikalischen Raums, der uns umgibt. Jeder Punkt der Ebene kann eindeutig durch ein 2-Tupel (x, y) oder (x_1, x_2) repräsentiert werden relativ zu dem klassischen zweidimensionalen Kartesischen Koordinatensystem. Und jeder Punkt des Anschauungsraumes kann eindeutig durch ein 3-Tupel (x, y, z) oder (x_1, x_2, x_3) repräsentiert werden relativ zu dem klassischen dreidimensionalen Kartesischen Koordinatensystem.





Die *Räume* $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind Paradebeispiele sogenannter *Vektorräume*, deren Eigenschaften axiomatisch festgelegt werden können. Allgemeiner reden wir oft von $\mathbb{R}^n$, wenn wir uns nicht festlegen wollen, ob $n = 2$ oder $n = 3$ oder sonst eine natürliche Zahl ist. Das Schöne ist, dass man in der Mathematik problemlos in höher dimensionalen Räumen rechnen kann, auch wenn die geometrische Vorstellungskraft dabei völlig versagt.

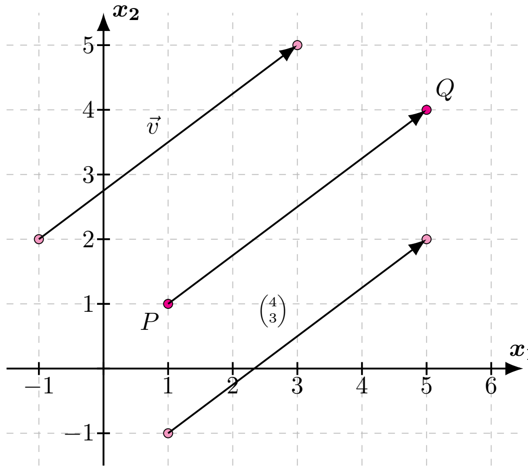
Da ein Vektor eine vektorielle Grösse darstellen soll, brauchen wir abgesehen vom Zahlwert unbedingt eine Richtung. Dazu drängen sich Pfeile auf. Ein Pfeil hat ja immer eine Richtung, und die Länge des Pfeils repräsentiert seinen Zahlwert. Aber Achtung: Ein Vektor ist nicht ein einzelner Pfeil mit genau festgelegtem Anfangs- und Endpunkt. Es ist für alles Folgende ganz wichtig, dass wir uns dies gut einprägen.

MERKE:

Ein **Vektor** im $\mathbb{R}^n$ ist die Gesamtheit aller Pfeile derselben Länge und Richtung.

In der Anschauungsebene oder im Anschauungsraum kann ein Vektor zwar durch einen einzelnen Pfeil repräsentiert werden, einen sogenannten *Repräsentanten*, aber der Pfeil kann dann im Raum beliebig parallel verschoben werden, ohne dass sich dadurch der Vektor ändert.

Beispiel: Der Pfeil, der vom Punkt $P(1,1)$ zum Punkt $Q(5,4)$ zeigt, ist ein Repräsentant eines Vektors. Der Vektor selbst ist aber die Menge aller Pfeile, welche gleich lang sind und die gleiche Richtung haben wie der erwähnte Pfeil. Das heisst, die drei abgebildeten Pfeile stellen alle denselben Vektor dar.



Formal darstellen kann man einen solchen Vektor auf mindestens drei Arten:

> einfach durch einen „Namen“, wie etwa $\vec{v}$,
>
> durch eine Angabe wie $\overrightarrow{PQ}$, indem man also einen Repräsentanten angibt, einen Pfeil mit definiertem Anfangspunkt P und Endpunkt Q,
>
> mit den Verschiebekoordinaten, die zeigen, auf wie viele Einheiten in die erste Raumrichtung die Pfeile um wie viele Einheiten in die zweite Raumrichtung gehen. Die Bezeichnung
>
> $$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
>
> zeigt etwa, dass jeder Pfeil dieses Vektors auf 4 Einheiten in x-Richtung 3 Einheiten in y-Richtung ansteigt.

Im Anschauungsraum hat ein Vektor natürlich drei Verschiebekoordinaten:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(zum Beispiel). Da wir bei allen folgenden Ausführungen eigentlich zwischen 2- und 3-dimensionalen Vektoren unterscheiden müssten, dies aber etwas umständlich wäre, entscheiden wir uns dafür, ab und zu die folgende Notation zu verwenden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ (v_3) \end{pmatrix}$$

Sie soll bedeuten, dass wir entweder den 2-dimensionalen Vektor

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

oder den 3-dimensionalen Vektor

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

meinen.

Spezielle Vektoren

Als *Nullvektor* $\vec{0}$ bezeichnen wir den Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (0) \end{pmatrix}.$$

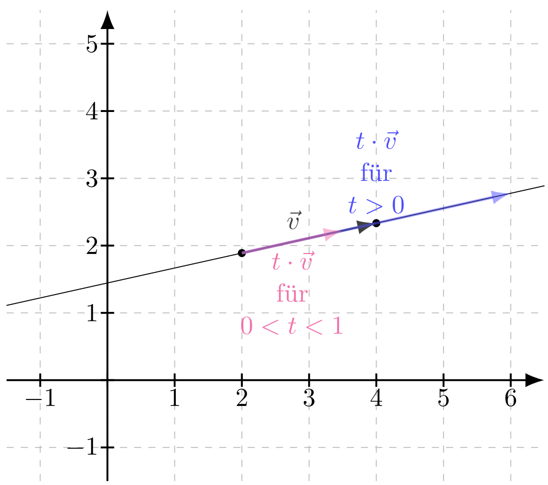
Es ist klar, dass dieser Vektor - genau genommen - keine Richtung hat; dennoch brauchen wir ihn unbedingt. Addiert man zum Beispiel in der naheliegenden Weise den Vektor $\overrightarrow{QP}$ zum Vektor $\overrightarrow{PQ}$, so muss irgendein Vektor das Resultat sein, und dies kann nur der Nullvektor $\vec{0}$ sein. Die Addition von Vektoren wird bald erklärt werden. Weiter: Ist ein Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ (v_3) \end{pmatrix}$$

gegeben, so definieren wir für irgendeine reelle Zahl t:

$$t \cdot \vec{v} := \begin{pmatrix} t \cdot v_1 \\ t \cdot v_2 \\ (t \cdot v_3)\,. \end{pmatrix}$$

Geometrisch wird klar, dass $t \cdot \vec{v}$ aus $\vec{v}$ hervorgeht durch eine Streckung oder Stauchung für den Fall $t > 0$:



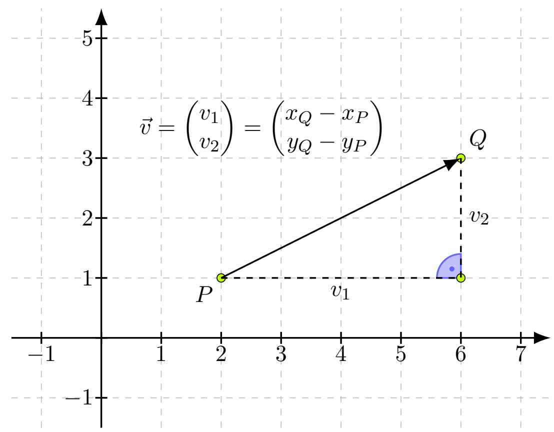
Ist $t < 0$, so zeigt $t \cdot \vec{v}$ natürlich in die entgegengesetzte Richtung. Als Spezialfall ist zu erwähnen, dass

$$-\vec{v} := (-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ (-v_3) \end{pmatrix}$$

derjenige Vektor ist, der dieselbe Länge wie $\vec{v}$ hat, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Die Norm

Wenn ein Vektor durch Anfangs- und Endpunkt eines Repräsentanten oder durch seine Verschiebekoordinaten gegeben ist, wie berechnet man dann seine Länge? Diese Frage findet eine ganz einfache Antwort und führt auf die Definition der sogenannten Norm:



Die Skizze macht deutlich, dass zur Berechnung der Länge der gute alte Pythagoras-Satz ausreicht. Und das trifft auch im dreidimensionalen Fall zu, wie interessierte Leserinnen und Leser ohne weiteres überprüfen können. Wir definieren daher:

Definition:
*Unter der **Norm** oder **Länge** eines Vektors*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ (v_3) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad n \in \{2, 3\},$$

verstehen wir die nicht-negative Zahl

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 \left(+v_3^2\right)}.$$

Der oben abgebildete Vektor, der die Verschiebekoordinaten 4 in x-Richtung und 2 in y-Richtung hat, besitzt offenbar die Norm

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$$

Jeder seiner Repräsentanten hat folglich genau diese Länge.

Hier sind einige elementare Eigenschaften der Norm:

Die Norm des Nullvektors $\vec{0}$ ist natürlich 0:

$$\left\|\vec{0}\right\| = \sqrt{0^2 + 0^2\,(+0^2)} = 0.$$

Ferner haben $\vec{v}$ und $-\vec{v}$ stets dieselbe Norm, weil

$$\begin{aligned}\|-\vec{v}\| &= \sqrt{(-v_1)^2 + (-v_2)^2 \left(+(-v_3)^2\right)}\\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2\,(+v_3^2)}\\ &= \|\vec{v}\|\end{aligned}$$

gilt.

Und schliesslich überträgt sich das Strecken und Stauchen eines Vektors in naheliegender Weise auf dessen Norm:

$$\begin{aligned}\|t\cdot\vec{v}\| &= \sqrt{(t\cdot v_1)^2 + (t\cdot v_2)^2 \left(+(t\cdot v_3)^2\right)}\\ &= \sqrt{t^2\cdot\left(v_1^2 + v_2^2\,(+v_3^2)\right)}\\ &= |t|\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2\,(+v_3^2)}\\ &= |t|\cdot\|\vec{v}\|\end{aligned}$$

Hat also etwa $\vec{v}$ die Länge 7, so hat der Vektor $-3\cdot\vec{v}$ die Länge 21.

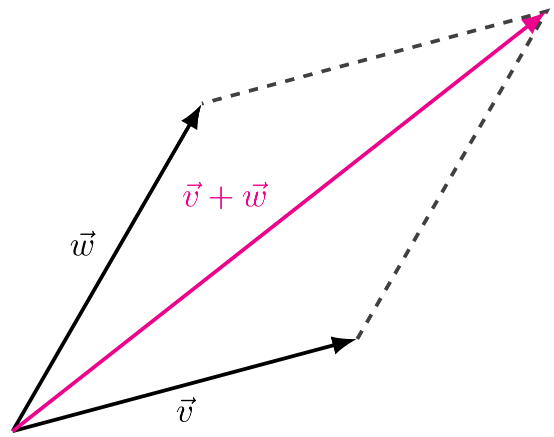
Addition und Subtraktion von Vektoren

Es ist naheliegend zu fragen, ob mit diesen neu eingeführten „Dingen“ (den Vektoren) sinnvolle Operationen durchgeführt werden können. Kann man Vektoren addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren? Hier geben wir eine Teilantwort auf diese Frage: Die Addition von Vektoren ist sicherlich sinnvoll, und es gibt ein ganz einfaches, oft benutztes physikalisches Vorbild dazu, nämlich das Zusammenwirken von Kräften. Ziehen zwei Personen an den beiden Enden eines Seils mit Kräften, die dieselbe Newton-Zahl, aber entgegengesetzte Richtungen haben, so „addieren“ sich diese Kräfte zu $\vec{0}$; das Seil erfährt keinerlei Bewegung. Wir können also schon mal sagen, dass die Vektoraddition so gemacht werden muss, dass

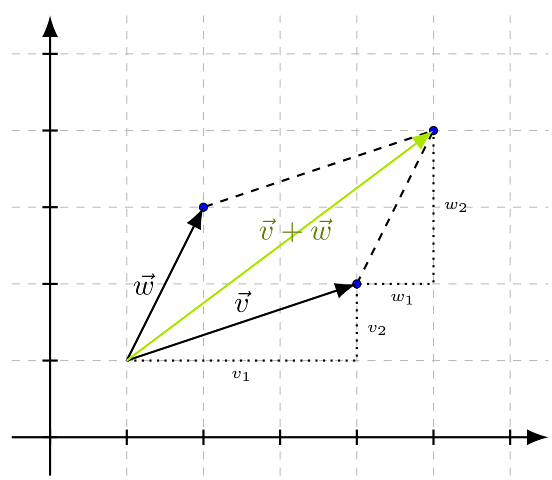
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

ist. Wenn mehrere (auch unterschiedliche) Kräfte wirken, so „addieren“ sie sich gemäss der Parallelogramm-Regel:

Abbildung 2: Kräftedreieck



Das heisst, wir müssen die formale Definition der Vektoraddition so gestalten, dass $\vec{v}+\vec{w}$ genau dieses physikalische Vorbild umsetzt. Wie kann das erreicht werden?



Offenbar addieren sich die x-Koordinaten der beiden Vektoren ebenso wie die beiden y-Koordinaten. Zwei Vektoren werden also addiert, indem man zwei ihrer Repräsentanten „aneinanderhängt“. Daher ist die nachfolgende Definition gut motiviert.

Definition:
Für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ sei

$$\vec{v}+\vec{w} := \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ (v_3+w_3) \end{pmatrix}.$$

Wir ergänzen diese Definition gleich um eine ebenso naheliegende Definition für die Subtraktion.

Definition:
Für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ sei

$$\vec{v}-\vec{w} := \vec{v}+(-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \\ (v_3-w_3) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4.5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ortsvektoren und eine wichtige Eigenschaft

Natürlich müssen wir sehr gut unterscheiden zwischen Punkten und Vektoren. Ein Punkt ist kein Vektor, und ein Vektor ist kein Punkt. Aber jedem Punkt P kann in eindeutiger Weise sein Ortsvektor zugeordnet werden; das ist derjenige Vektor, der durch den Repräsentanten $\overrightarrow{OP}$ angegeben werden kann, wenn O den Origo bezeichnet.

Definition:
Ist $p\,(x_1, x_2, (x_3))$ *ein Punkt in* $\mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$*, so heisst der folgende Vektor* ***Ortsvektor*** *von* P*:*

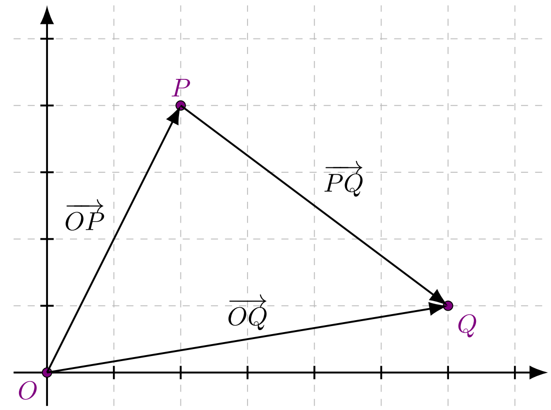
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (x_3) \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor eines Punktes ist also die Gesamtheit aller Pfeile, die dieselbe Länge und Richtung haben wie derjenige Pfeil, der den Origo in den Punkt verschiebt.

Dank dem Konzept des Ortsvektors kommt die Vektorrechnung nun erst richtig in Gang. Wir wollen das anhand von einigen Beispielen deutlich machen:

Beispiel 1

Eine überaus häufige Teilaufgabe von Problemen der Vektorgeometrie besteht darin, denjenigen Vektor zu finden, der durch den Pfeil dargestellt werden kann, welcher von einem ersten gegebenen Punkt P zu einem zweiten gegebenen Punkt Q weist. Kurz: Bei gegebenen Punkten P und Q soll $\overrightarrow{PQ}$ angegeben werden.



Das ist sehr einfach, aber gerade angesichts der Häufigkeit dieser Fragestellung ist es ganz wichtig, dass dieser Schritt reibungslos funktioniert. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

gilt; das ist eine simple Anwendung der Vektoraddition. Wir können sofort schliessen, dass

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

Man erhält also den gesuchten Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dadurch, dass man von den Koordinaten des Zielpunktes die Koordinaten des Quellpunktes subtrahiert.

Merke:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ (z_Q) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ (z_P) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ (z_Q - z_P) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sind zum Beispiel die beiden Punkte $P(11,-4,7)$ und $Q(5,0,12)$ gegeben, so können wir sofort hinschreiben:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5-11 \\ 0-(-4) \\ 12-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

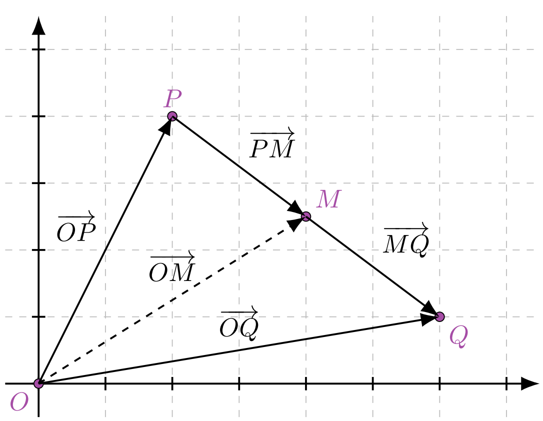
Beispiel 2

Gelegentlich muss der Mittelpunkt einer gegebenen Strecke gefunden werden. Rechnerisch! Fragen wir uns also, wie man den Mittelpunkt M der Strecke bestimmen kann, die durch die beiden gegebenen Punkte P und Q definiert wird.

Da M der Mittelpunkt sein soll, muss natürlich

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

gelten. Nach der Definition der Vektoraddition können wir also Folgendes notieren:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} x_P + \frac{1}{2} \cdot (x_Q - x_P) \\ y_P + \frac{1}{2} \cdot (y_Q - y_P) \\ \big(z_P + \frac{1}{2} \cdot (z_Q - z_P)\big) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (x_P + x_Q) \\ \frac{1}{2} \cdot (y_P + y_Q) \\ \big(\frac{1}{2} \cdot (z_P + z_Q)\big) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenig überraschend ist derjenige Vektor herausgekommen, bei dem jede Koordinate das arithmetische Mittel der jeweiligen Koordinaten der beiden Punkte ist.

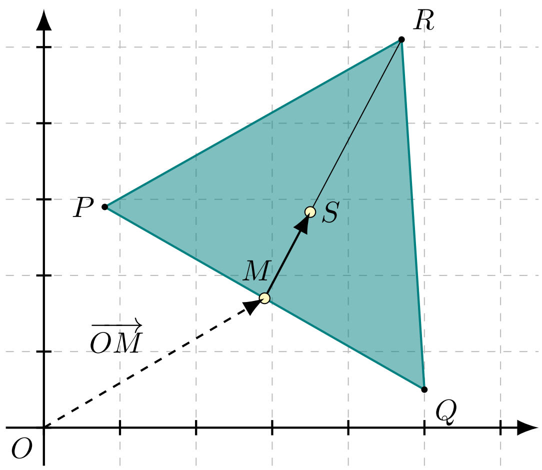
Alternativ könnte man das Dreieck OPQ zu einem Parallelogramm ergänzen und ausnützen, dass sich die beiden Diagonalen im Parallelogramm mittig schneiden. Dann ist nämlich einfach

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right),$$

und man gewänne das obige Resultat noch schneller.

Beispiel 3

Weniger trivial ist die Frage, wie man wohl den Schwerpunkt eines gegebenen Dreiecks rechnerisch bestimmen kann.



Dazu müssen wir uns erinnern, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks der Schnittpunkt der drei Schwerlinien ist, welche jeweils eine Ecke mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbinden. Und dass der Schwerpunkt jede Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1 (von der Ecke aus gesehen) teilt. Damit können wir dann die folgende Vektorrechnung in Gang setzen:

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{OS} \\
&= \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MR} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(x_P + x_Q) \\ \frac{1}{2}\,(y_P + y_Q) \\ \big(\frac{1}{2}\,(z_P + z_Q)\big) \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_R - \frac{1}{2}\,(x_P + x_Q) \\ y_R - \frac{1}{2}\,(y_P + y_Q) \\ \big(z_R - \frac{1}{2}\,(z_P + z_Q)\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (x_P + x_Q) + \frac{1}{3} \cdot \big(x_R - \frac{1}{2} \cdot (x_P + x_Q)\big) \\ \frac{1}{2} \cdot (y_P + y_Q) + \frac{1}{3} \cdot \big(y_R - \frac{1}{2} \cdot (y_P + y_Q)\big) \\ \big(\frac{1}{2} \cdot (z_P + z_Q) + \frac{1}{3} \cdot \big(z_R - \frac{1}{2} \cdot (z_P + z_Q)\big)\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot (x_P + x_Q + x_R) \\ \frac{1}{3} \cdot (y_P + y_Q + y_R) \\ \big(\frac{1}{3} \cdot (z_P + z_Q + z_R)\big) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir finden also: Die Koordinaten des Schwerpunktes findet man, indem man jeweils das arithmetische Mittel der Koordinaten der drei Eckpunkte berechnet:

$$S = \left(\frac{x_P + x_Q + x_R}{3}, \frac{y_P + y_Q + y_R}{3} \right).$$

Im 3-dimensionalen Fall gesellt sich natürlich eine entsprechende dritte Koordinate dazu.