Längen, Flächen und Volumina

[Integralrechnung]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

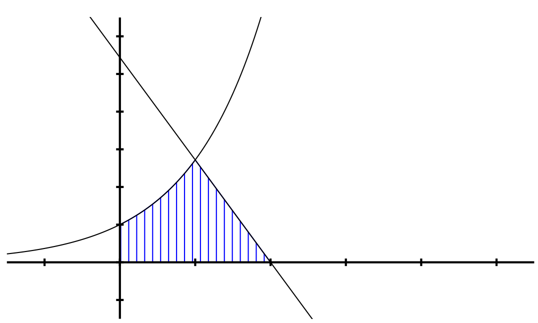
1 https://de.wikipedia.org/wiki/Perkeo

Flächeninhalte

Wir haben schon oft gesehen, dass der Flächeninhalt, der von einem Graphen und der x-Achse (zwischen $x = a$ und $x = b$) begrenzt wird, mit Hilfe eines geeigneten Integrals berechnet werden kann. Die Definition des bestimmten Integrals ist ja so, dass für eine zwischen $x = a$ und $x = b$ positive Funktion $f(x)$ gerade der Inhalt des Flächenstücks zwischen Graph und x-Achse entsteht. Aber wir halten uns einmal mehr vor Augen, dass es falsch wäre zu sagen, ein bestimmtes Integral sei immer der zwischen Graph und x-Achse gebildete Flächeninhalt. Wir müssen das Integral viel allgemeiner sehen, und dazu ist es immer wieder heilsam, sich Beispiele wie die Wegstrecke, das Kugelvolumen, die Pumpleistung oder die Rohrdurchflussmenge in Erinnerung zu rufen.

Hier wollen wir uns noch einmal der häufigen, aber bei weitem nicht wichtigsten Anwendung des bestimmten Integrals widmen, nämlich der Inhaltsberechnung von Flächen, die von Funktionsgraphen und der x-Achse gebildet werden. Da die Theorie dazu schon völlig bekannt ist, gehen wir sofort zu Beispielen über.

Beispiel 1

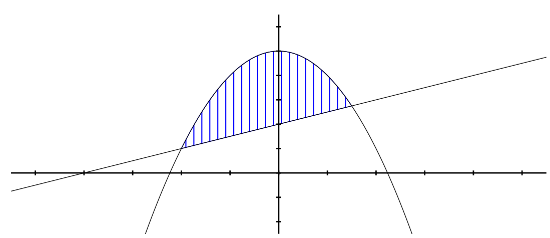


Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die gebildet wird von den Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = -\mathrm{e} \cdot x + 2\mathrm{e}$, der x-Achse und der y-Achse. Die beiden Graphen schneiden sich offenbar an der Stelle $x = 1$. Zudem hat die lineare Funktion die Nullstelle 2. Wir können den gesuchten Flächeninhalt also mit Hilfe von zwei Integralen finden:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 -\mathrm{e} \cdot x + 2\mathrm{e} \,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^x \Big|_0^1 + \left(\frac{-\mathrm{e}}{2} x^2 + 2\mathrm{e} \cdot x \right) \Big|_1^2 \\
&= \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) + \left(-2\mathrm{e} + 4\mathrm{e} - \frac{-\mathrm{e}}{2} - 2\mathrm{e} \right) \\
&= \frac{3\mathrm{e}}{2} - 1.
\end{aligned}
$$

Beispiel 2

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von $f(x) = -x^2 + 5$ und $g(x) = 0.5x + 2$ begrenzt wird:



Wir müssen zuerst die Schnittpunkte der beiden Graphen ausfindig machen. Indem man die Gleichung $f(x) = g(x)$ löst, findet man $x_1 = -2$ und $x_2 = 1.5$. Nun bestimmen wir den gesuchten Flächeninhalt durch Subtraktion von zwei Integralen:

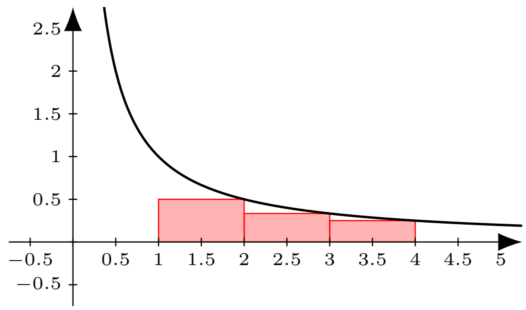
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1.5} \left(-x^2+5\right)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1.5} \left(\frac{1}{2}x+2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{1.5} \left(-x^2-\frac{1}{2}x+3\right)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+3x\Big|_{-2}^{1.5} \\
&= \frac{343}{48}.
\end{aligned}
$$

Aufgaben dieser Art sind nicht sonderlich schwer. Interessant könnte aber doch sein zu erleben, wie mühelos man nun Inhalte von Flächen berechnen kann, die mindestens teilweise krummlinige Berandungen haben. Denken Sie daran, wie viel Mühe allein der Kreis den antiken Forschern machte und wie sie sich raffinierte Ausschöpfungsmethoden (Exhaustionen) einfallen lassen mussten, um solchen Flächeninhalten Herr zu werden.

Flächen unter Kurven können auch dazu benutzt werden, komplizierte Summen abzuschätzen. Nehmen wir einmal an, wir möchten wissen, wie gross die Zahl

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

für konkrete $n > 1$ etwa ist. Die Berechnung der Summe ist mühsam, aber wir können dank etwas Integralrechnung leicht herausfinden, wie gross der Wert der Summe ungefähr ist. Hier erfahren Sie alle Details:



Im Graphen der Funktion $1/x$ erkennt man leicht (Untersumme), dass

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

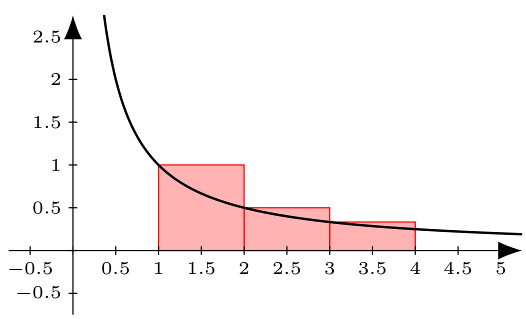
ist. Hinzufügen des fehlenden ersten Summanden 1 und Berechnung des Integrals führen auf:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} &< 1+\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x)\Big|_1^n + 1 \\
&= \ln(n)+1.
\end{aligned}
\qquad (\star)
$$

In einer leicht variierten Skizze erkennt man sofort (Obersumme), dass

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1} > \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

gilt:



Hinzufügen des fehlenden letzten Summanden $1/n$ und Berechnen des Integrals führen auf:

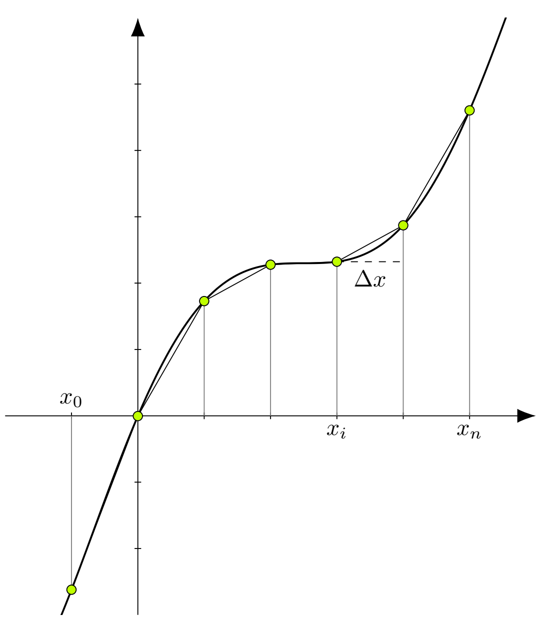
$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} &> \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\\ &= \ln(x)\Big|_1^n+\frac{1}{n} \qquad (\star\star)\\ &= \ln(n)+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Setzt man $(\star)$ und $(\star\star)$ zusammen, so ergibt sich eine überaus interessante Abschätzung:

$$\ln(n)+\frac{1}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\ln(n)+1.$$

Addiert man zum Beispiel die ersten 1000000 Stammbrüche, so landet man gemäss dieser Abschätzung bei einer Summe zwischen 13.8 und 14.82.

Länge eines Kurvenstücks



Ein weiteres Problem soll hier kurz zur Sprache kommen: Wie berechnet man die Länge eines endlichen Kurvenstücks, wenn es sich bei der Kurve um den Graphen einer gegebenen Funktion handelt?

Wir können die Kurve natürlich durch einen Streckenzug approximieren, indem wir das Intervall in n gleiche Teilintervalle der Länge Δx unterteilen wie in der Abbildung gezeigt. Die i-te Strecke hat dann die Länge

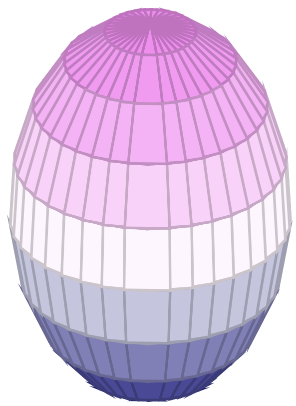
$$\begin{aligned}\Lambda_i &= \sqrt{\left(f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)\right)^2+(\Delta x)^2}\\ &= \left(\sqrt{\left(\frac{f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)}{\Delta x}\right)^2+1}\right)\cdot\Delta x.\end{aligned}$$

Die Kurvenlänge erhalten wir dann durch Aufaddieren der Längen aller Strecken sowie Grenzübergang $n\to\infty$:

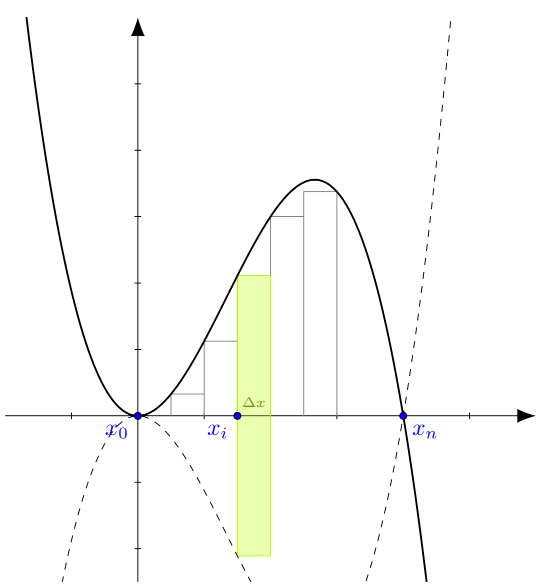
$$\begin{aligned}\Lambda &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\Lambda_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt{\left(\frac{f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)}{\Delta x}\right)^2+1}\right)\Delta x\right)\\ &= \int_a^b\sqrt{\left(f'(x)\right)^2+1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Volumina von Rotationskörpern

Zahlreiche Körper sind *rotationssymmetrisch*, das heisst, es gibt eine Achse, so dass der ganze Körper um diese Achse gedreht werden kann, ohne dass er seine Form ändert. Die Abbildung zeigt einen solchen Körper, und es ist klar, dass wenn man eine vertikale Achse durch den „Südpol“ und den „Nordpol“ legt, der Körper bezüglich dieser Achse drehsymmetrisch ist. Zudem ist dies die einzige solche Achse. Körper mit dieser Eigenschaft heissen *Rotationskörper*.



Wir können uns weiter vorstellen, dass dieser Körper entstanden ist, indem der Graph einer geeigneten Funktion um die x-Achse rotiert ist. Dazu muss dann allerdings diese Funktion bekannt sein, das heisst, wir müssen in der Lage sein, eine Funktion anzugeben, deren Graph exakt der äusseren Begrenzungslinie des (um 90° gekippten) Körpers folgt. Weitere Beispiele von Rotationskörpern sind etwa die Kugel, der gerade Kreiszylinder, der gerade Kreiskegel, der Torus, und so weiter.



Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Formel zu finden, die zu jedem solchen Rotationskörper das Volumen berechnet, vorausgesetzt, man kennt die Funktion, die die äussere Begrenzungslinie beschreibt. Wenn nun also $f(x)$ irgendeine Funktion ist, die zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse rotiert und so einen Rotationskörper erzeugt, welche Formel liefert dann das Volumen des Körpers?

Nun, ganz einfach: Wir unterteilen das Intervall von $x_0 = a$ bis $x_n = b$ in n Teilintervalle der Länge Δx und denken uns das Volumen des Rotationskörpers approximiert durch n ganz dünne zylindrische Scheiben. Die i-te Scheibe (in der Skizze farblich herausgehoben) hat dann das Volumen $V_i = \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x$. Addiert man all diese Scheibenvolumina und führt einen Grenzwertprozess für $\Delta x \to 0$ (respektive $n \to \infty$) durch, so erhält man das exakte Volumen des Rotationskörpers:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x \right) \\ &= \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man leicht und elegant die folgenden Volumenformeln (und viele weitere) herleiten:

Für einen geraden Kreiszylinder gilt

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Für einen geraden Kreiskegel gilt

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h.$$

Für einen geraden Kegelstumpf gilt

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right).$$

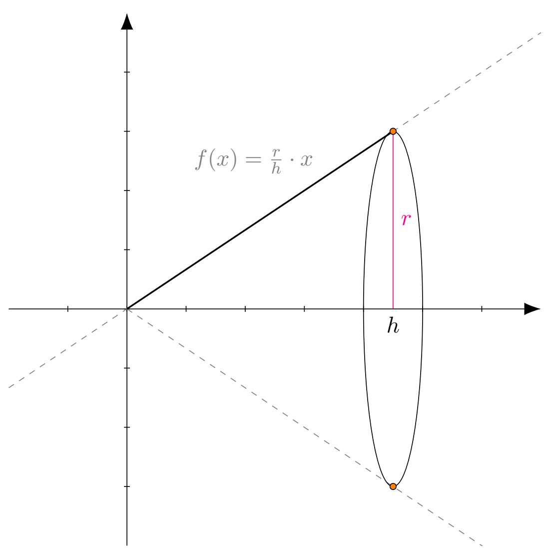
Für eine Kugel gilt

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Für ein Kugelsegment gilt:

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2 \left(3r - H\right).$$

Wir zeigen das gleich anhand des Beispiels des Kreiskegels:



Als Rotationskörper wird der gerade Kreiskegel offenbar erzeugt durch einen Ausschnitt aus dem Graphen von

$$f : x \mapsto \frac{r}{h} x.$$

Wir benutzen also obige Formel mit dieser Funktion sowie den Integrationsgrenzen $a = 0$ und $b = h$. Und wir erhalten, wie erwartet:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^h \\ &= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h. \end{aligned}$$

Perkeo war ein Hofzwerg im Schloss von Heidelberg. Zuerst war er als Kuriosität zur Belustigung des Fürsten und des Hofstaates angestellt worden. Später war er dann Kellermeister, dessen Aufgabe unter anderem darin bestand, auf das grosse Fass von Heidelberg, das grösste Weinfass der Welt achtzugeben. Perkeo muss ein enormer Säufer gewesen sein. Sein Name entstand, weil er auf die Frage, ob er noch ein Glas trinken wolle, stets geantwortet haben soll: „perché no?“ (Warum nicht?). Offenbar war Wein das einzige Getränk, das er zu sich nahm, schon als Kind soll er regelmässig Wein konsumiert haben. Trotzdem wurde Perkeo erst im achten Lebensjahrzehnt zum ersten Mal krank. Ein Arzt riet ihm dringend, auf Wein zu verzichten und stattdessen Wasser zu trinken. Trotz grosser Skepsis und Furcht nahm Perkeo diesen Rat an und verstarb am folgenden Tag.

Das war der Zwerg Perkeo Im Heidelberger Schloss, An Wuchse klein und winzig, An Durste riesengross.[1]

Das grosse Fass von Heidelberg ist 8 Meter lang. In der Mitte hat es einen Durchmesser von 6 Metern, und die beiden kreisförmigen Seitenflächen

[1] Aus einem Lied von Victor von Scheffel.

Abbildung 1: Perkeo

haben einen Durchmesser von 5 Metern. Können Sie aus diesen Angaben berechnen, wie viele Liter Wein das Fass ungefähr fasst?

Nun ja, ganz genau können wir das aus diesen Angaben nicht berechnen. Aber wir können immerhin eine gute Abschätzung vornehmen, indem wir das Fass als Rotationskörper auffassen, welcher durch einen Ausschnitt aus einer Parabel gebildet wird. Als Ansatz wählen wir die nach unten offene Parabel

$$p : x \mapsto -a \cdot x^2 + 3, \qquad a > 0.$$

Damit ist der Durchmesser von 6 Metern sichergestellt. Da die kreisförmigen Seitenteile einen Durchmesser von 5m haben sollen, muss gelten $p(4) = 2.5$, woraus $a = 1/32$ folgt. Also soll uns die Funktion

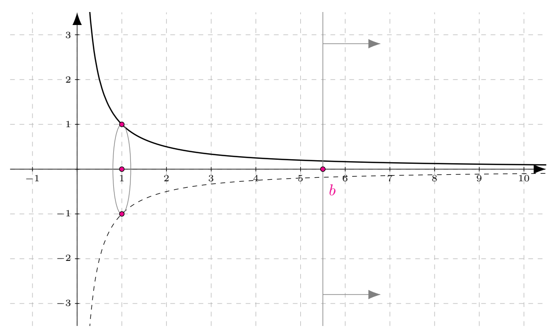
$$p : x \mapsto -\frac{1}{32} \cdot x^2 + 3$$

als Modell dienen. Für das Fassvolumen gilt nun etwa:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^4 \left(-\frac{1}{32}x^2 + 3\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Berechnet man das Integral, so findet man ein Volumen von angenähert 202m^3, also etwa 202‘000 Litern. Prost!

„Gabriel's Horn“ wird derjenige Körper genannt, der durch Rotation des Graphen von $y(x) = 1/x$ zwischen $x = 1$ und $x = \infty$ um die x-Achse entsteht. Tatsächlich ähnelt der Körper der Fanfare, in die der Erzengel Gabriel geblasen haben muss. Was ist dessen Volumen?



Hier sind wir gleich mit zwei Problemen konfrontiert: Zunächst müssen wir in Erfahrung bringen, wie wohl ein bestimmtes Integral berechnet werden kann, wenn die obere Grenze ∞ (oder die untere $-\infty$) ist. Solche Integrale heissen *uneigentliche Integrale*. Danach muss das Volumen gefunden werden.

Nun, wir machen das in ganz naheliegender Weise. Wir berechnen einfach das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 1$ und $x = b$ für ein endliches b und lassen danach b gegen

Unendlich streben. Also:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{b\to\infty}\left(\pi\cdot\int_1^b\left(\frac{1}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\pi\cdot\left(-x^{-1}\right)\Big|_1^b\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\pi\cdot\left(-\frac{1}{b}+1\right)\right)=\pi. \end{aligned}$$

Wir sehen also, das Volumen des unendlich langen Horns ist endlich und zwar exakt gleich π. Eine interessante zusätzliche Wendung erfährt dieses Problem, wenn man die Oberfläche des Körpers ausrechnet - ebenfalls mit Integralrechnung. Dann nämlich erhält man einen unendlich grossen Wert. Dies ist als „Paradoxon von Gabriel's horn“ bekannt geworden. Wie kann ein Körper unendliche Oberfläche haben, wenn das Volumen doch endlich gross ist und somit gut 3 Liter Farbe ausreichen, um das Horn zu füllen und damit auch von innen „anzustreichen“!? Wer sich von diesem scheinbaren Widerspruch angesprochen fühlt, soll versuchen, die Paradoxie aufzulösen ...