Integrationsregeln

[Integralrechnung]

Armin P. Barth

ETH zürich

Ableitungsregeln umkehren

Dank dem Hauptsatz sind wir nun in der Lage, Integrale zu berechnen, sofern es uns gelingt, eine Stammfunktion für die zugrunde liegende Funktion zu finden. Das ist immer dann leicht möglich, wenn die Grundfunktion f eine der Elementarfunktionen ist, eine Polynomfunktion etwa oder eine Potenzfunktion, eine Exponentialfunktion oder eine trigonometrische oder logarithmische Funktion. In solchen Fällen brauchen wir ja lediglich eine der Ableitungsregeln umzukehren. Da wir beispielsweise wissen, dass $(\sin(x))' = \cos(x)$ ist, ist auch klar, dass

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c$$

ist usw.

Wir stellen im Folgenden alle Integrationsregeln zusammen, die sich durch simple Umkehrung gewisser Ableitungsregeln ergeben:

Aufgrund der Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x),\\ (k \cdot f(x))' &= k \cdot f'(x),\end{aligned}$$

können wir schliessen, dass

Satz:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\int (k \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgrund der Ableitungsregel

$$\left(x^k\right)' = k \cdot x^{k-1}, \qquad \forall k \in \mathbb{Q}$$

können wir schliessen, dass

Satz:

$$\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + c, \qquad k \neq -1.$$

Aufgrund der Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \cos(x),\\ \cos'(x) &= -\sin'(x),\end{aligned}$$

können wir schliessen, dass

Satz:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x) + c,\\ \int \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \sin(x) + c,\end{aligned}$$

gilt für x im Bogenmass. Aufgrund der Ableitungsregel

$$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x \quad (a > 0)$$

(und speziell $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,) können wir schliessen, dass

Satz:

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + c$$

und speziell

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c.$$

Aufgrund der Ableitungsregel

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}^+, x \neq 0$$

können wir schliessen, dass

Satz:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c, \qquad x > 0.$$

Zu der Kettenregel und zu der Produkt- und Quotientenregel haben wir nicht sofort ein offensichtliches Pendent in der Welt der Integrale zur Hand. Es gibt allerdings Integrationsregeln, die sich aus diesen Ableitungsregeln herleiten lassen, und wir werden sie in diesem Text behandeln.

Die gute Nachricht, dass wir nun endlich in der Lage sind, alle Elementarfunktionen zu integrieren, wird sofort getrübt und relativiert durch die Nachricht, dass damit die allermeisten Integrale noch nicht geknackt sind. Das glauben Sie nicht? Denken Sie nur daran, dass eine in der Praxis vorkommende Funktion selten eine reine Sinusfunktion oder eine reine Exponentialfunktion ist. In den meisten Fällen liegen irgendwelche Kombinationen solcher Elementarfunktionen vor. Denken Sie nur an

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Und hüten Sie sich vor dem möglicherweise naheliegenden, aber vollkommen falschen Gedanken, man könne die beiden Faktoren einzeln integrieren. Obwohl ja

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c$$

und $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + \tilde{c}$ ist, wäre die Vermutung

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} (-\cos(x) + c)\cdot(\sin(x) + \tilde{c})$$

völlig falsch. Das können Sie durch Ableiten der rechten Seite sofort und leicht verifizieren.

Ebenso ist es uns zurzeit noch unmöglich, eines dieser Integrale zu berechnen:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{3}{(2x-5)\cdot(x+7)}\,\mathrm{d}x,$$
$$\ldots$$

Wir werden also noch einiges arbeiten müssen, um solche, ähnliche und andere Integrale bestimmen zu können. Um Ihnen später Enttäuschungen zu ersparen, sei aber schon jetzt gesagt, dass durchaus nicht zu jeder beliebigen Funktion eine Stammfunktion in der Klasse der Elementarfunktionen gefunden werden kann.

Definition:
Eine Funktion, zu der in der Klasse der Elementarfunktionen keine Stammfunktion existiert, heisst ***nicht geschlossen integrierbar****.*

Beispiele nicht geschlossen integrierbarer Funktionen sind etwa:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$
$$g(x) = \mathrm{e}^{-x^2},$$
$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x},$$
$$k(x) = \sqrt{1 + x^4}.$$

Das zeigt, dass Integrieren bisweilen aufwändig, schwierig oder gar unmöglich ist.

Hier ist es sinnvoll, ein paar Bemerkungen zur höheren Mathematik anzubringen: Indem wir versucht haben, Funktionen zu integrieren und gemerkt haben, dass das nicht trivial ist, sind wir auf ganz natürliche Weise auf die Frage gestossen, ob denn eigentlich alle „vernünftigen“ Funktionen elementar („geschlossen“) integrierbar sind oder nicht. Obige Bemerkung zeigt schon, dass das leider nicht so ist. Zuerst haben das Laplace und Liouville herausgefunden. Letzterer bewies 1833 streng, dass die Funktion e^{-x^2} keine elementare Stammfunktion besitzt. Ein moderner Beweis dazu wurde Ende der 1960er-Jahre unabhängig von Risch und Rosenlicht erbracht. Daraus ist dann der sogenannte *Risch-Algorithmus* entstanden, der heute Bestandteil von jedem modernen CAS-Taschenrechner ist. Dieser Algorithmus erlaubt es zu entscheiden, ob eine vorliegende Funktion eine elementare Stammfunktion besitzt oder nicht; und er kann diese im positiven Fall auch bestimmen. Der amerikanische Mathematiker Robert Henry Risch hat ihn 1968 entwickelt. Tatsächlich ist der Risch-Algorithmus im strengen Sinn kein Algorithmus, denn er benutzt als eine Subroutine ein Verfahren, welches testet, ob bestimmte Terme konstant 0 sind oder nicht. Gemäss einem ebenfalls aus dem Jahr 1968 stammenden Satz von Richardson ist es aber prinzipiell unmöglich, ein Verfahren zu erzeugen, welches einen solchen Test bei jedem beliebigen Term zuverlässig durchführt; das Problem ist nicht entscheidbar. Dennoch ist der Risch-Algorithmus etwas vom Besten, was wir heute zur Verfügung haben.

Bevor wir weitere wichtige Integrationsregeln besprechen, soll hier noch einmal anhand eines illustrativen und typischen Anwendungsbeispiels die Bedeutung der Integralrechnung hervorgehoben werden. Ungeduldige Leserinnen und Leser können es gerne überspringen.

Intermezzo: Eine Anwendung zur Integralrechnung

Vielleicht haben Sie etwas aus den Augen verloren, dass der stärkste Antrieb, Integralrechnung zu studieren, der ist, Probleme lösen zu können, die sich in der Praxis stellen. Wir hatten angefangen mit einigen Problemen, die allesamt auf Terme der Art

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x\right)$$

führten, und mittlerweile haben wir diesem Term die Abkürzung

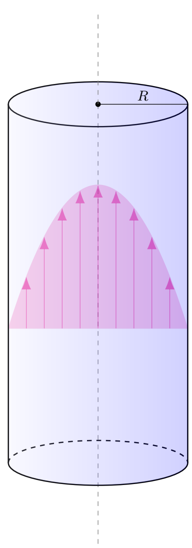
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

verpasst und ausführlich die Bedeutung, die Eigenschaften und die praktische Berechnung solcher Integrale studiert. Ermattet von all den Anstrengungen der letzten Kapitel könnte Ihr Geist nun vielleicht zum Schluss gekommen sein, dass es ja genüge, Integrale berechnen zu können, wenn sie vorliegen. Dem muss aber unbedingt entgegnet werden, dass Integrale häufig nicht einfach *vorliegen*. Zugegeben, in zahlreichen Schulbüchern liegen sie haufenweise vor. Aber bedenken Sie, dass Integrale häufig auf Grund der Vorgeschichte *entstehen*. Und die Vorgeschichte haben wir in den letzten Abschnitten gänzlich ausgeblendet, mit gutem Recht, ging es ja darum, den Zusammenhang zur Differentialrechnung zu verstehen.

Nun aber sollten wir uns besinnen, dass Integrale oftmals eine Vorgeschichte haben und dass gerade diese Vorgeschichte interessant, aber auch anspruchsvoll sein kann. Hier soll anhand von einem Praxisbeispiel gezeigt werden, wie die Vorgeschichte eines Integrals etwa aussehen könnte; die eigentliche Berechnung wird dann dank unseres Einsatzes in den letzten Abschnitten fast schon trivial sein.

Aufgabe: Wir stellen es uns zur Aufgabe, die Durchflussmenge pro Zeiteinheit einer laminaren Strömung in einem Rohr zu berechnen. Am besten denken wir dabei an Blutbahnen, Ölpipelines, Wasserleitungen, usw.

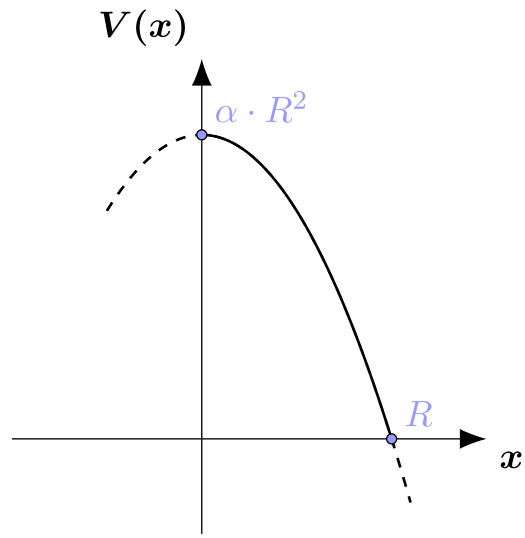
Eine Strömung heisst *laminar*, wenn die strömende Flüssigkeit (realistischerweise) inneren Reibungen ausgesetzt ist, aber keine Wirbelbildung aufweist. Bei einer laminaren Strömung durch ein Rohr haben die einzelnen Flüssigkeitsschichten unterschiedliche Geschwindigkeiten: Ganz am Rand, also direkt an der Rohrwand, ist die Geschwindigkeit (praktisch) gleich 0, in der Rohrachse ist sie am grössten. Die folgende Abbildung soll dies mit Hilfe von unterschiedlich langen Geschwindigkeitsvektoren verdeutlichen:



Wir wählen (im Sinne eines mathematischen Modells) den Ansatz, dass die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsmoleküls im Abstand x von der Rohrachse gleich

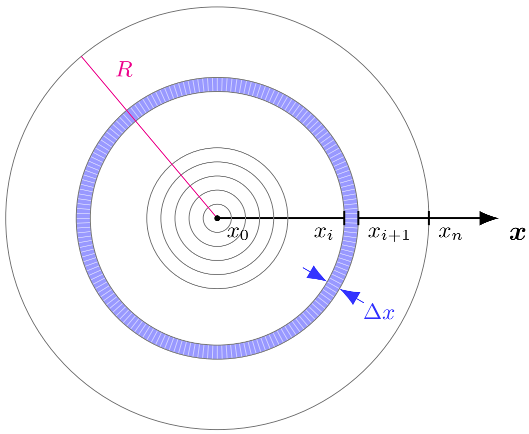
$$v(x) = \alpha \cdot \left(R^2 - x^2\right) = \alpha \cdot R^2 - \alpha \cdot x^2$$

ist.



Das erscheint realistisch, da der Graph dieser Funktion eine nach unten offene Parabel mit Scheitelpunkt $\left(0, \alpha \cdot R^2\right)$ und Nullstellen $\pm R$ ist. α ist ein Parameter, der qualitativ nichts am Geschwindigkeitsverlauf ändert.

Unsere Aufgabe muss es nun sein, die Flüssigkeitsmenge zu bestimmen, die pro Zeiteinheit (sagen wir: 1 Sekunde) durch einen Rohrquerschnitt fliesst. Dazu denken wir uns den Rohrquerschnitt unterteilt in $n \in \mathbb{N}$ dünne Ringe der Dicke Δx; die Unterteilungspunkte $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n = R$ sorgen für diese Ringbildung. Näherungsweise (!) kann dann innerhalb eines Ringes die Geschwindigkeit als konstant (nämlich gleich der Geschwindigkeit am inneren Ringrand) angenommen werden.



Durch den schraffierten Ring fliesst mit dieser Annahme in einer Sekunde die Flüssigkeitsmenge

$$\begin{aligned}&\left(\pi \cdot (x_i + \Delta x)^2 - \pi \cdot x_i^2\right) \cdot \alpha \cdot \left(R^2 - x_i^2\right)\\ &= \pi \cdot \left(x_i^2 + 2x_i\Delta x + (\Delta x)^2 - x_i^2\right) \cdot \alpha \cdot \left(R^2 - x_i^2\right)\\ &= \pi \cdot (2x_i + \Delta x) \cdot \alpha \cdot \left(R^2 - x_i^2\right) \cdot \Delta x.\end{aligned}$$

Durch den gesamten Querschnitt fliesst also in einer Sekunde die Flüssigkeitsmenge

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot (2x_i + \Delta x) \cdot \alpha \cdot \left(R^2 - x_i^2\right) \cdot \Delta x.$$

Nun wird diese Angabe desto genauer ausfallen, je dünner wir die Ringe wählen, je grösser also n ist. Daher ist die exakte Flüssigkeitsmenge, die pro Sekunde durch den Querschnitt fliesst, gegeben durch

$$D = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot (2x_i + \Delta x) \cdot \alpha \cdot \left(R^2 - x_i^2\right) \cdot \Delta x\right).$$

Dies ist die entscheidende Stelle. Kürzen wir mit $f(x_i)$ den Term $\pi\cdot(2x_i + \Delta x)\cdot\alpha\cdot\left(R^2 - x_i^2\right)$ ab, so erhalten wir genau den Term, der der Definition des bestimmten Integrals zugrunde liegt. Und daher ist

$$D = \int_0^R \pi \cdot (2x) \cdot \alpha \cdot \left(R^2 - x^2\right)\, \mathrm{d}x.$$

Dank all unserer Bemühungen in den letzten Abschnitten ist die Berechnung dieses Integrals nicht schwierig: Zunächst dürfen wir die multiplikativen Konstanten $\pi, 2, \alpha$ alle vor das Integral ziehen und den Integranden ausmultiplizieren:

$$D = 2\pi\alpha \cdot \int_0^R \left(R^2 \cdot x - x^3\right)\, \mathrm{d}x.$$

Gemäss Hauptsatz muss jetzt eine Stammfunktion $F(x)$ des Integranden gefunden und dann der Term $F(x)\big|_0^R$ berechnet werden:

Nun,

$$F(x) = \frac{R^2}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^4,$$

und

$$\begin{aligned}F(x)\big|_0^R &= \left(\frac{R^2}{2} \cdot R^2 - \frac{1}{4} \cdot R^4\right) - \left(\frac{R^2}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0\right)\\ &= \frac{R^4}{4}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$D = 2\pi\alpha \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi\alpha}{2} \cdot R^4.$$

Offenbar ist (bei unseren Modellannahmen) die Durchflussmenge proportional zur vierten Potenz des Radius. Das ist eine sehr eindrückliche Abhängigkeit. Verkleinert man etwa den Radius um nur einen Siebtel, so verringert sich D bereits um die Hälfte $\left(\left(\frac{6}{7}\right)^4 \approx 0.5\right)$, aber vergrössert man den Radius um 20%, so verdoppelt sich die Durchflussmenge. Dies ist sicherlich im Zusammenhang mit Herzkranzgefässen eine bedenkenswerte Tatsache.

Übrigens haben wir damit ein bekanntes Gesetz des Strömungslehre hergeleitet:

Satz: (Gesetz von Hagen-Poiseuille)
Bei laminarer Strömung ist die Durchflussmenge durch ein zylindrisches Rohr proportional zur vierten Potenz des Radius.

Weitere Integrationsregeln

Ein mathematischer Witz gefällig? Bitteschön:

Zwei Mathematiker essen in einem Restaurant. Der erste beklagt sich heftig: „Die allermeisten Menschen sind mathematisch gesehen Idioten. Sie sind nicht einmal in der Lage, die einfachsten Berechnungen korrekt auszuführen, und sie wissen überhaupt nichts über diese wunderbare Wissenschaft.“ Der zweite widerspricht: „Das ist doch übertrieben. Die Menschen wissen alles, was sie wissen müssen.“
Später geht der erste Mathematiker zur Toilette. Der zweite ergreift diese willkommene Gelegenheit und bittet den Kellner an den Tisch. „Darf ich Sie um etwas bitten?“ fragt er den Kellner. Dieser nickt nur. „Das nächste Mal, wenn Sie an unseren Tisch kommen, werde ich Ihnen eine Frage stellen. Aber egal, was ich sage, bitte antworten Sie einfach mit 'x Quadrat', okay!“ Der Kellner wundert sich etwas, erklärt sich aber bereit mitzumachen.
Als nun der erste Mathematiker von der Toilette zurückkehrt, begrüsst der zweite ihn mit den Worten: „Du, ich habe eine Idee. Ich werde Dir beweisen, dass die meisten Menschen mehr über Mathematik wissen, als Du denkst.“ Mit diesen Worten winkt er den Kellner herbei. Als dieser am Tisch steht, fragt ihn der zweite Mathematiker: „Entschuldigen Sie, können Sie mir sagen, was das unbestimmte Integral von $2x$ nach der Variablen x ist?“ Der Kellner antwortet: „x Quadrat.“ „Siehst Du“, triumphiert der zweite Mathematiker, „hab ich's nicht gesagt?“ Der erste Mathematiker ist beeindruckt, und er sagt: „Okay, ich habe mich offenbar geirrt, das ist wirklich erstaunlich.“ Und der Kellner ergänzt: „Plus eine Konstante!“

Die Geschichte zeigt, dass wenigstens im Kopf dieses Kellners mehr als bloss oberflächliches Wissen vorhanden ist. Er weiss, dass das unbestimmte Integral die Menge *aller* Stammfunktionen ist, formal:

$$\int 2x \, \mathrm{d}x = x^2 + c.$$

Nun gut, dies ist einfach zu finden; man muss ja lediglich eine der Differentiationsregeln umkehren. Noch immer gibt es aber Funktionen, die wir zu diesem Zeitpunkt noch nicht integrieren könnten. Ein Beispiel ist etwa

$$\int x \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x = ?$$

Die Funktion ist ein Produkt zweier Elementarfunktionen, und es wäre falsch anzunehmen, dass man die Stammfunktionen einfach dadurch finden kann, dass man beide Faktoren einzeln integriert.

Wir sehen, dass wir uns bei einem Produkt zweier Funktionen etwas Neues einfallen lassen müssen. Ist es nicht naheliegend, bei der Produktregel, also der Ableitungsregel für Produkte, anzusetzen, um daraus nach Möglichkeit eine entsprechende Integrationsregel für Produkte zu gewinnen? Es zeigt sich, dass dieser Weg ebenso einfach wie erfolgreich ist.

Integrationstechniken: Partielle Integration

Wir setzen also bei der Produktregel für Differentiation an und formen sie wie folgt um:

Zunächst gilt ja:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

nach der Produktregel. Folglich haben die beiden Funktionen links und rechts vom Gleichheitszeichen dieselbe Stammfunktionsmenge:

$$\begin{aligned}&\int (u(x) \cdot v(x))' \, \mathrm{d}x \\ &\quad = \int \big(u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\big) \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nach Definition des Integrals sowie einer Eigenschaft des Integrals ist dann bis auf eine additive Konstante

$$\begin{aligned}&u(x) \cdot v(x) \\ &= \int u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x + \int u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Aufgelöst nach einem der Integrale ergibt sich also

Satz: (Partielle Integration)

$$\begin{aligned}&\int u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x \\ &= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x + c.\end{aligned}$$

Für bestimmte Integrale nimmt diese letzte Gleichung dann die folgende Form an:

Satz: (Partielle Integration)

$$\begin{aligned}&\int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x \\ &= u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Noch ist vielleicht unklar, inwiefern diese Regel erfolgreich sein kann. Auf den ersten Blick würde man denken, dass es wenig Sinn macht, ein Integral (linke Seite) so umzuformen, dass man hinterher einen komplizierteren Term (rechte Seite) erhält, der überdies erneut ein Integral enthält, das man dann unter Umständen auch nicht lösen kann. Der enorme Wert dieser Methode liegt im feinen Unterschied der beiden Integrale. Während links das Integral

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x$$

erscheint, haben wir es rechts mit dem Integral

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x$$

zu tun. Sehen Sie den feinen Unterschied? Die Methode wird dann erfolgreich, wenn wir es schaffen, dass das Integral auf der rechten Seite einfacher zu lösen ist als das Integral auf der linken.

Sind wir nun in der Lage, das Integral

$$\int x \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x$$

zu bestimmen? Offenbar können wir die eben hergeleitete Regel der partiellen Integration nur dann für diesen Fall anwenden, wenn wir einen der beiden Faktoren als $u'(x)$ und den anderen als $v(x)$ interpretieren. Und dies zeigt die entscheidende Frage, die man sich jedes Mal stellen muss, wenn man diese Methode anzuwenden gedenkt: Sollen wir den ersten Faktor als $u'(x)$ und den zweiten als $v(x)$ interpretieren, oder wäre es umgekehrt besser? In welchem Fall hält die rechte Seite ein einfacheres Integral bereit, das wir dann bearbeiten können? Um unseren Blick für diese Strategiefrage zu schärfen, probieren wir beide Möglichkeiten:

Falls wir den ersten Faktor als $u'(x)$ und den zweiten als $v(x)$ auffassen, so liefert die Regel Folgendes:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot (-\sin(x)) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Falls wir aber den zweiten Faktor als $u'(x)$ und den ersten als $v(x)$ aufassen, so liefert die Regel Folgendes:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Diese beiden Fälle zeigen deutlich, dass die Regel erfolgreich sein kann, wenn man die richtige Strategie wählt. Im zweiten Fall ist auf der rechten Seite ein deutlich einfacheres Integral entstanden, das sich nun leicht weiter bearbeiten lässt. Der erste Fall dagegen hat eine rechte Seite produziert, die die linke an Kompliziertheit noch übertrifft; ein solcher Schritt bringt uns der Lösung also keineswegs näher.

Nun können wir das gesuchte Integral finden, indem wir den zweiten Fall weiterverfolgen:

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \cos(x) \,\mathrm{d}x &= \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x \\
&= \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \sin(x) \cdot x - (-\cos(x)) + c \\
&= \sin(x) \cdot x + \cos(x) + c.
\end{aligned}$$

Integrationstechniken: Integration durch Substitution

Die Substitutionsregel gelangt oftmals dann zur Anwendung, wenn eine verschachtelte Funktion zu integrieren ist. Betrachten Sie zum Beispiel das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \,\mathrm{d}x.$$

Darin steckt eine verschachtelte Funktion, nämlich die Funktion

$$f\left(g(x)\right) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$$

mit $g(x) = \sin(x)$ und $f(y) = \mathrm{e}^y$. Und zusätzlich kommt ein weiterer Term $\cos(x)$ vor, der „zufällig“ gerade die Ableitung der inneren Funktion ist. In einem solchen Fall ist die Substitutionsregel überaus hilfreich. Wir leiten die Regel nun her, bevor wir uns anschauen, wie sie in obigem Beispiel und in anderen ähnlichen Beispielen helfen kann:

Satz: (Integration durch Substitution)
Seien f und g zwei beliebige reellwertige und stetige Funktionen, sei g zudem differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Für die zusammengesetzte Funktion $F \circ g$ gilt dann gemäss Kettenregel Folgendes:

$$\begin{aligned}(F \circ g)'(x) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

Durch zweimalige Anwendung des Hauptsatzes erhält man dann das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x \\ &\quad = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) \\ &\quad = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &\quad = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

Jetzt können wir deutlich machen, wie diese Regel üblicherweise angewendet wird. Zunächst soll betont werden, dass sie (bei obiger Schreibweise) von links nach rechts benützt wird, Das heisst, es liegt manchmal ein schwieriges Integral vor, welches bei genauerer Betrachtung vom Typ

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$$

ist. Trifft das zu, so können wir es nun immer umformen in

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, \mathrm{d}y$$

in der Hoffnung, dass dieses Integral einfacher zu berechnen ist.

Wie sieht das aus bei dem eingangs erwähnten Beispiel? Zu berechnen ist also

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x.$$

Wir stellen sofort fest, dass im Integranden eine verschachtelte Funktion

$$f(g(x)) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$$

mit $g(x) = \sin(x)$ und $f(y) = \mathrm{e}^y$ vorkommt und dass überdies die Ableitung der inneren Funktion als weiterer Faktor auftritt:

$$g'(x) = \cos(x).$$

Das Integral ist darum von der Form

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$$

und wir dürfen es durch

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\sin(0)}^{\sin(1)} \mathrm{e}^y \, \mathrm{d}y$$

ersetzen. Tatsächlich gelingt uns die Berechnung nun mühelos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x &= \int_{\sin(0)}^{\sin(1)} \mathrm{e}^y \, \mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^y \Big|_{\sin(0)}^{\sin(1)} \\ &= \mathrm{e}^{\sin(1)} - \mathrm{e}^{\sin(0)} \\ &= \mathrm{e}^{\sin(1)} - 1.\end{aligned}$$

Selbstverständlich kann diese Regel auch für unbestimmte Integrale angewendet werden. Dann lautet sie so:

Satz: (Substitutionsregel für unbestimmtes Integral)

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=g(x)}.$$

Soll etwa das unbestimmte Integral

$$\int \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

bestimmt werden, so benützen wir die Regel von links nach rechts und erhalten:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\sin(x)}\\ &= \mathrm{e}^{y} + c\big|_{y=\sin(x)}\\ &= \mathrm{e}^{\sin(x)} + c.\end{aligned}$$

Wir wollen hier nicht verschweigen, dass man oft einen Umgang mit dieser Regel sieht, der auf den ersten Blick etwas abenteuerlich wirkt, der aber durchaus korrekt ist. Wir wollen das an obigem Beispiel demonstrieren. Zu berechnen ist also einmal mehr

$$\int \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Der Integrand enthält eine verschachtelte Funktion und als weiteren Faktor die Ableitung der inneren Funktion. Wir substituieren (daher der Name der Regel) die innere Funktion durch u:

$$u := \sin(x)$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x),$$

respektive

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)}.$$

Hier tun wir also so, als könne man den Term

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

wie einen gewöhnlichen Bruch behandeln, was aber natürlich - genau genommen - nicht geht. Allerdings führt der abenteuerliche Weg trotzdem zum korrekten Resultat, was ja durch obige Herleitung bestätigt wird. Damit ist dann

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{u} \cos(x) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)}\\ &= \int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{e}^{u} + c\\ &= \mathrm{e}^{\sin(x)} + c.\end{aligned}$$

Schauen wir ein weiteres Beispiel an: Angenommen, wir sollten

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$$

bestimmen. Zunächst ist natürlich

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Die entscheidende Beobachtung ist, dass hier eine verschachtelte Funktion vorkommt, nämlich

$$\frac{1}{\cos(x)}.$$

mit der inneren Funktion $u := \cos(x)$ und der äusseren Funktion $\frac{1}{u}$, und dass zusätzlich auch noch die Ableitung der inneren Funktion vorkommt, nämlich $-\sin(x)$ (jedenfalls bis auf das Vorzeichen). Daher versuchen wir, eine Lösung herbeizuführen, indem wir $\cos(x)$ durch u substituieren. Also:

$$u = u(x) = \cos(x).$$

Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$$

beziehungsweise

$$\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Unser Integral lässt sich also so umformen:

$$\begin{aligned}
\int \tan(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Und damit ist es besonders einfach geworden.
Wir finden schliesslich:

$$\begin{aligned}
\int \tan(x)\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\ln(|u|) + C \\
&= \ln\left(\frac{1}{|u|}\right) + C \\
&= \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + C.
\end{aligned}$$