Eigenschaften und Hauptsatz

[Integralrechnung]

Armin P. Barth

ETH zürich

Elementare Eigenschaften

Einige Eigenschaften des bestimmten Integrals werden sich später, wenn wir Integrale praktisch einsetzen, als nützlich und abkürzend erweisen. Wir stellen zwei Definitionen voran und besprechen dann einige ziemlich offensichtliche Eigenschaften:

Definition:
Es gilt folgendes:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0,$$
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad a < b.$$

Beachten Sie, dass diese Festsetzungen einerseits naheliegend sind, andererseits aber nicht aus der Definition des bestimmten Integrals abgeleitet werden können. Es müssen also wirklich *Definitionen* und können keine *Korollare* sein.

Die folgenden beweisbaren Eigenschaften werden den rechnerischen Umgang mit bestimmten Integralen immer wieder erleichtern. Es zeigt sich, dass ein konstanter Faktor im Integranden vor das Integral gezogen werden darf (Eigenschaft (i)) und dass das bestimmte Integral einer Summe aufgespalten werden kann in die Summe der Integrale der einzelnen Summanden (Eigenschaft (ii)), beides Tatsachen, die bei genauem Hinsehen keineswegs überraschend sind. Darüber hinaus geben wir noch zwei weitere wichtige Eigenschaften an:

Satz:
Eigenschaften des bestimmten Integrals:

i. Für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

ii. Summen lassen sich aufspalten:

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

iii. Für $a \leqslant b \leqslant c$ ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

iv. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei f stetig in $[a,b]$. Dann existiert eine Konstante $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \cdot (b-a).$$

Bevor wir ans Beweisen gehen, soll vorgeführt werden, wie diese Eigenschaften typischerweise eingesetzt werden: Falls uns später beispielsweise das bestimmte Integral

$$\int_a^b \left(2\sin x + \cos x\right)\,\mathrm{d}x$$

begegnet, so werden wir dank der Eigenschaften

(i) und (ii) wie folgt aufspalten können:

$$\begin{aligned}&\int_a^b (2\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = \int_a^b 2\sin x\,\mathrm{d}x + \int_a^b \cos x\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = 2\cdot\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x + \int_a^b \cos x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Und da wir später Integrale von Grundfunktionen wie sin() und cos() natürlich im Schlaf beherrschen werden, wird dann die Berechnung des Ausgangsintegrals geglückt sein. Diese Eigenschaften erlauben also in gewissen Fällen das Aufspalten des Integranden in Grundfunktionen, deren Integration bald zu unserem Repertoire zählen wird.

Eigenschaft (iii) kann etwa bei einer abschnittweise definierten Funktion gewinnbringend eingesetzt werden: Ist zum Beispiel

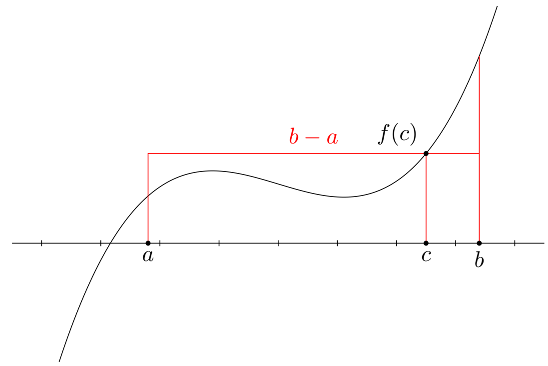
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leqslant 2, \\ 4x-4 & , x > 2. \end{cases}$$

und soll diese Funktion von $a = 0$ bis $b = 5$ integriert werden, so werden wir vereinfachend so rechnen:

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^5 (4x-4)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

und die beiden letzten Integrale werde uns bald kein Kopfzerbrechen mehr bereiten.

Der Mittelwertsatz (iv) schliesslich besagt, dass sich im Intervall $[a, b]$ stets eine Stelle c finden lässt, so dass das bestimmte Integral gleich dem Produkt aus $b - a$ und dem Funktionswert an der Stelle c ist, ein Sachverhalt, der sich für eine positive Funktion besonders schön veranschaulichen lässt:



Für eine positive Funktion ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

bekanntlich gleich dem Flächeninhalt unter der Kurve. Nach dem Mittelwertsatz muss es nun möglich sein, diesen Flächeninhalt auch durch eine Rechteckfläche auszudrücken; dazu kann ein Rechteck mit Breite $b - a$ und einer geeigneten Höhe $f(c)$ stets gefunden werden, da irgendeiner der Funktionswerte im Intervall $[a, b]$ bestimmt die dafür geeignete Grösse hat. Noch mehr auf den Punkt gebracht: Der Flächeninhalt unter der Kurve ist gleich dem Inhalt eines Rechtecks *mittlerer* Höhe.

Wir liefern nun zwei Beweise und überlassen den Rest den Leserinnen und Lesern als Übung:

Beweis von (i). Nach Definition des bestimmten Integrals ist

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} k\cdot f(x_i)\cdot\Delta x\right).$$

Der Faktor k kann in einem ersten Schritt aus dem Summenzeichen herausgezogen (ausgeklammert) und in einem zweiten Schritt vor den Limes gezogen werden; für diesen zweiten Schritt ziehen wir das Limesgesetz

$$\lim_{n\to\infty}(k\cdot a_n) = k\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n)$$

heran. Also ist

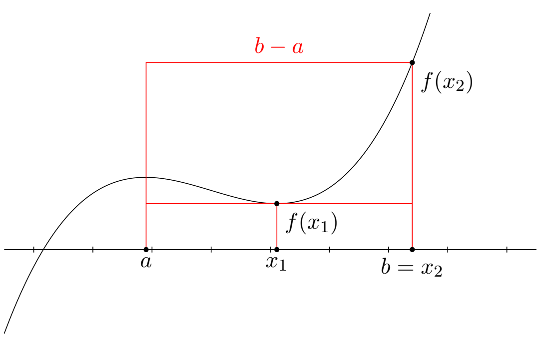
$$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot \Delta x\right),$$

und dieser letzte Term ist wiederum nach Definition des bestimmten Integrals gleich

$$k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Beweis von (iv). Im Intervall $[a, b]$ gibt es zweifellos zwei Stellen x_1 und x_2 so, dass $f(x_1)$ ein kleinster und $f(x_2)$ ein grösster aller Funktionswerte innerhalb dieses Intervalls ist. (Im abgebildeten Beispiel ist $x_2 = b$, was natürlich ein Zufall ist.)



Dann gilt sicherlich:

$$f(x_1)\cdot(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_2)\cdot(b-a).$$

In der Abbildung können diese drei Grössen als Flächeninhalte gedeutet werden, und dann wird der notierte Zusammenhang ganz klar. Bedenken Sie aber, dass die Funktion innerhalb des betrachteten Intervalls auch negative Werte aufweisen kann, und für diesen Fall sollten Sie obige Ungleichung noch genau durchdenken.

Aus der Ungleichung ist sofort ersichtlich, dass die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

zwischen den Zahlen $f(x_1)\cdot(b-a)$ und $f(x_2)\cdot(b-a)$ liegt. Also muss eine weitere Zahl μ existieren, so dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu\cdot(b-a) \tag{$\star$}$$

ist, und diese Zahl μ liegt zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$, also: $f(x_1) \leqslant \mu \leqslant f(x_2)$.

Da die Funktion als stetig vorausgesetzt wurde, muss μ als Funktionswert irgendeiner Stelle c vorkommen. Bedenken Sie, dass sich die Funktion stetig vom Niveau $f(x_1)$ auf das Niveau $f(x_2)$ aufschwingen muss; dabei passiert sie wegen der Stetigkeit jeden dazwischenliegenden Wert, also auch μ. Daher muss eine Stelle c existieren, für die $f(c) = \mu$ gilt. Setzen wir dies in $(\star)$ ein, so folgt sofort die Behauptung:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a).$$

□

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – Teil 1

Nun sind wir an einer entscheidenden Stelle angelangt. Wir kennen die Definition des bestimmten Integrals und einige Eigenschaften. Wir haben einen umständlichen Weg kennengelernt, ein solches Integral in einfachen Fällen zu berechnen, und wir haben einen Algorithmus behandelt, der uns die Arbeit abnimmt, es dafür aber nicht so genau nimmt. Wir sind einigen Interpretationen des bestimmten Integrals begegnet, wissen, dass ein solches Integral eine Wegstrecke, ein Volumen, eine Arbeit, aber auch (in gewissen Fälle) einen Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen bedeuten kann, und wir ahnen, dass wir etwas Grossem auf der Spur sind: Bestimmte Integrale sind wahrscheinlich der Schlüssel zu unzähligen Problemen aus Naturwissenschaft und Technik und anderen Disziplinen. Aber der Makel all unserer bisherigen Anstrengungen ist: Wir kennen keinen Weg, ein Integral schnell und mühelos zu berechnen, noch sind wir allein auf die Definition angewiesen und kommen, wollen wir ein Integral berechnen, um komplizierte Summen- und Grenzwertrechnungen nicht herum. Fast scheint es, als wäre die ganze Mühe vergeblich. So muss es den Forschern im 17. Jahrhundert ergangen sein, als die Integralrechnung noch in den Kinderschuhen steckte.

Aber dann, wie früher erwähnt, entdeckten Newton und Leibniz einen entscheidenden Zusammenhang zwischen der noch jungen und unausgereiften Integralrechnung einerseits und der Differentialrechnung andererseits. Wir werden uns nun diesem Zusammenhang in drei Schritten annähern: Im ersten Schritt zeigen wir, ohne auf Hintergründe und Erklärungen einzugehen, den Algorithmus zur schnellen Integration. Dies wird die Ungeduldigen unter Ihnen zufrieden stellen, die sich nicht mehr länger den Speck durch den Mund ziehen lassen wollen. Im zweiten Schritt werden wir versuchen zu verstehen, weshalb Integration den Prozess der Differentiation umkehrt, was ja der Schlüssel zum schnellen Integrieren ist. Und im dritten Schritt schliesslich werden wir den Hauptsatz in formal strenger Form notieren und beweisen können. Danach wird alles einfacher sein. Danach wird uns ein riesiges Feld möglicher Anwendungen offen stehen.

Nun also zum eigentlichen Thema dieses Abschnittes: Wie kann ein bestimmtes Integral *schnell* berechnet werden?

Wir gehen sofort medias in res und notieren den Algorithmus, der das Integrieren so viel einfacher macht:

Algorithmus

Soll

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden, so muss man

1. Irgendeine Funktion $F(x)$ finden, für die gilt: $F'(x) = f(x)$.
2. Den Wert des Terms $F(b) - F(a)$ berechnen.

Paukenschlag! So einfach ist Integrieren. Man muss lediglich eine Funktion finden, deren Ableitung die gegebene Funktion ist und dann die beiden Integrationsgrenzen einsetzen und subtrahieren. Wir probieren dies sofort an einigen Beispielen:

Was ist

$$\int_1^7 x^2\,\mathrm{d}x?$$

Eine Funktion, deren 1. Ableitung gleich $f(x) = x^2$ ist, ist zum Beispiel $F(x) = (1/3) \cdot x^3$. (Daneben gibt es aber unendlich viele weitere, die alle auch verwendet werden könnten, nämlich $(1/3) \cdot x^3 + c$ für irgendein $c \in \mathbb{R}$.) Nun ist

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{3} \cdot 7^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = 114.$$

Folglich lautet das Resultat:

$$\int_1^7 x^2 \, \mathrm{d}x = 114.$$

Was ist

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x?$$

Zunächst ist klar, dass die cos()-Kurve im angegebenen Intervall stets unterhalb der x-Achse verläuft; wir müssen also einen negativen Wert für das Integral erwarten. Eine Funktion, deren 1. Ableitung gleich $\cos(x)$ ist, ist $F(x) = \sin(x)$ (oder $\sin(x) + c$ für irgendein $c \in \mathbb{R}$). Damit ist

$$F(b) - F(a) = \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1.$$

Also lautet das Resultat:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = -1.$$

Was ist

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x?$$

Nun, wenn wir uns den Graphen vorstellen, so wird sofort klar, dass dieses Integral den Wert 0 haben muss. Können wir auch rechnerisch zu diesem Resultat gelangen? Eine Funktion, deren 1. Ableitung gleich $\sin(x)$ ist, ist $-\cos(x)$. Damit ist

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -1 - (-1) \\ &= -1 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist in der Tat

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

In diesem Zusammenhang fallen einige Definitionen an, die den sprachlichen Umgang mit solchen Berechnungen erleichtern:

Definition:
Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ heisst ***Stammfunktion*** *von f.*

Unter dem ***unbestimmten Integral*** *einer Funktion $f(x)$, in Zeichen:*

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x,$$

versteht man die Menge aller Stammfunktionen von f. Den Term $F(b) - F(a)$ notieren wir der Kürze halber oft auch so:

$$F(x)\big|_a^b .$$

Damit lässt sich unser eingangs des Kapitels erwähnter Algorithmus für schnelles Integrieren auch so fassen:

Algorithmus

Soll

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

berechnet werden, so muss man

1. Eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ finden.
2. $F(x)\big|_a^b$ berechnen.

Noch einmal soll deutlich gesagt werden, dass eine Funktion stets unendlich viele Stammfunktionen besitzt, von denen je zwei sich durch eine additive Konstante unterscheiden. Beachten Sie weiter, dass ein bestimmtes Integral eine Zahl ist, während ein unbestimmtes aber eine Funktionenmenge ist, also ein ganz anderes mathematisches Objekt. Es ist zum Beispiel:

$$\int x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

während aber etwa

$$\int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.25$$

ist. Vergewissern wir uns noch einmal, dass die Konstante c bei der Stammfunktion keine Rolle spielt: Es sei

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

zu berechnen, und $F(x) + c$ sei eine beliebige Stammfunktion. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x &= (F(x) + c)\big|_a^b \\ &= (F(b) + c) - (F(a) + c) \\ &= F(b) + c - F(a) - c \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Wir sehen deutlich, dass die additive Konstante entfällt. Soll nur ein bestimmtes Integral berechnet werden, so können wir also auf das Schreiben dieser Konstante ohne weiteres verzichten. Soll aber ein unbestimmtes Integral notiert werden, so ist das Schreiben dieser Konstanten natürlich obligatorisch.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – Teil 2

Wir wollen verstehen, was das Integral im Innersten zusammenhält. Welches ist der genaue Zusammenhang zwischen Ableitungen und Integrationen? In diesem Abschnitt wollen wir diesem Zusammenhang auf die Spur kommen.

Wir wechseln für diese Überlegungen aber den Standpunkt: Haben wir bei bestimmten Integralen die Integrationsgrenzen bisher immer als fest und gegeben aufgefasst, so lösen wir uns jetzt von dieser Vorstellung. Die bestimmten Integrale, mit denen wir nun experimentieren, sollen immer Untergrenze $a = 0$ und eine variable Obergrenze haben. Um das ganz deutlich zu machen, verzichten wir hier auf den Buchstaben b für die Obergrenze (weil wir als Gewohnheitstiere doch nicht umhin könnten, dabei an eine feste gegebene Zahl zu denken), sondern verwenden den Buchstaben ξ; kurz und gut, wir betrachten also Integrale der Form

$$\int_0^\xi f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Es schadet nicht, hierbei an den Inhalt der Fläche zu denken, die die x-Achse und der f-Graph zwischen $x = 0$ und $x = \xi$ einschliessen, obwohl uns bewusst ist, dass ein bestimmtes Integral durchaus nichts mit einem Flächeninhalt zu tun haben kann, vor allem dann, wenn es negativ ist. Wir leisten uns hier aber die Ungenauigkeit, von Flächeninhalten zu sprechen, damit uns bei den folgenden, nicht einfachen Überlegungen eine konkrete Vorstellung begleitet.

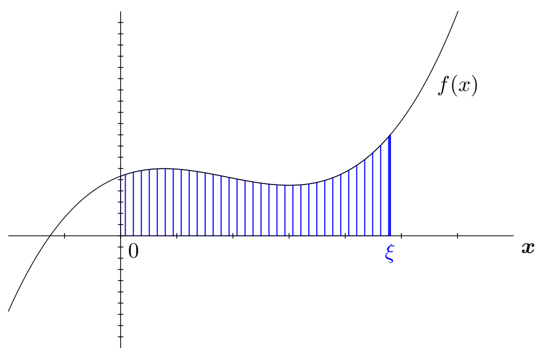
Da wir uns die Obergrenze ξ variabel denken, können wir das Integral

$$\int_0^\xi f(x) \,\mathrm{d}x$$

als eine *Funktion* auffassen, eine Funktion nämlich, die jeder beliebigen Obergrenze ξ den Flächeninhalt unter dem Graphen zwischen 0 und ξ zuordnet. Die Funktion, die wir hier meinen, hat also die Variable ξ, und wir wollen ihr den Namen F geben:

$$F(\xi) := \int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diese so gebildete Funktion - Wir nennen sie auch *Integralfunktion* - leistet also die folgende Zuordnung: Einer beliebig vorgegebenen Obergrenze ξ wird das bestimmte Integral der Funktion f von 0 bis zu dieser Obergrenze zugeordnet.



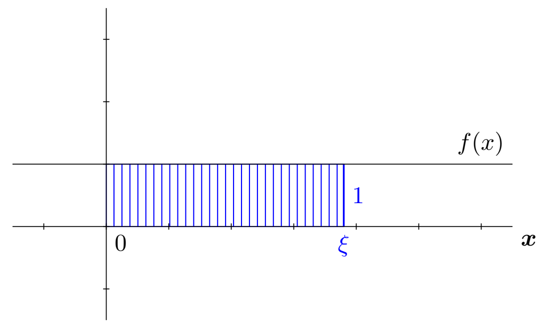
Es ist hilfreich, ξ in Gedanken zu verschieben. Bei der hier abgebildeten Funktion f wird der Wert der Funktion $F(\xi)$ anwachsen, wenn wir ξ nach rechts schieben (weil ja dann der zugeordnete Flächeninhalt zunimmt) und kleiner werden, wenn wir ξ nach links schieben. Versuchen Sie unbedingt, die unterschiedlichen Rollen der Variablen x und ξ sauber zu trennen: x ist die Variable der Funktion f und ist als solche verantwortlich für den f-Graphen. ξ aber ist die Variable der Funktion F, welche den schraffierten Flächeninhalt als Output hat.

Die genaue Untersuchung der Integralfunktion

$$F(\xi) = \int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$$

wird schliesslich die Zusammenhänge zu Tage fördern, die im Hauptsatz gebündelt ausgedrückt werden. Wir tasten uns in kleinen Schritten vorwärts und betrachten als nächstes ein konkretes Beispiel einer solchen Integralfunktion:

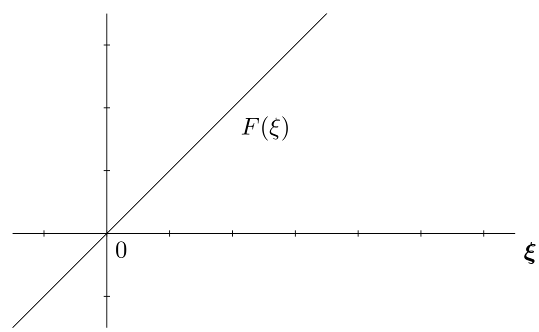
Sei $f(x) = 1$, also die konstante Funktion, die jeder reellen Zahl den Wert 1 zuweist. Wie sieht hierzu die Integralfunktion $F(\xi)$ aus?



Selbst wenn wir Integrale nicht berechnen könnten, könnten wir sofort sagen, dass

$$F(\xi) = \int_0^\xi 1\,\mathrm{d}x = \xi \cdot 1 = \xi$$

ist, da der schraffierte Flächeninhalt den Wert ξ hat. Also ist $F(\xi) = \xi$, eine Funktion, die graphisch dargestellt die Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten ist.

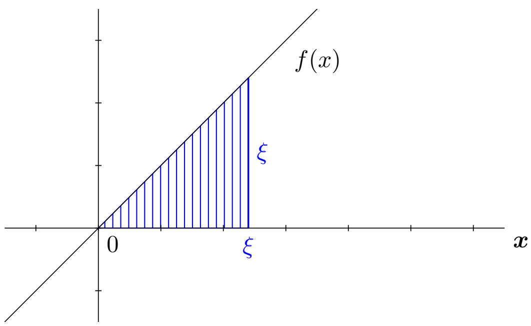


Diese Winkelhalbierende hat natürlich überall Steigung 1: $F'(\xi) = 1$. Besser müsste man schreiben:

$$\frac{dF}{d\xi} = 1,$$

um deutlich zu machen, dass bei dieser Ableitung ξ die Variable ist. Ist das nun ein Zufall, dass diese 1 ja auch die Ausgangsfunktion war, so dass wir nun also durch Ableiten der Integralfunktion die Ausgangsfunktion erhalten? Beachten Sie, dass dies nur eine undeutliche Spur ist, die uns auch in die Irre leiten könnte. Bei weiterem Nachdenken wird es sich aber zeigen, dass wir dabei sind, direkt zum Kern des Hauptsatzes vorzustossen ...

Betrachten wir ein zweites Beispiel: $f(x) = x$. Wie sieht hier die Integralfunktion $F(\xi)$ aus?



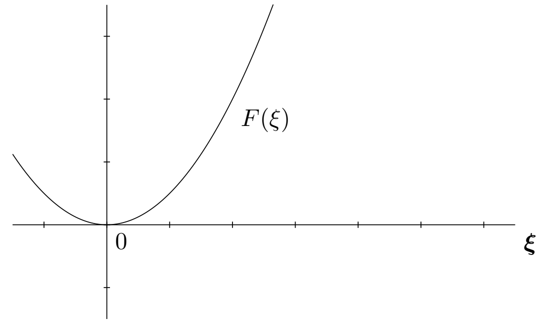
Da der schraffierte Flächeninhalt die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten ξ hat, fällt es uns leicht, die Integralfunktion zu bestimmen:

$$F(\xi) = \int_0^\xi x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \, \xi^2.$$

Dies ist eine Parabel, deren Steigung an irgendeiner Stelle gleich $F'(\xi) = \xi$ ist. (Die Ableitung ist nach der Variablen ξ, also:

$$\frac{dF}{\xi} = \xi.$$

)



Ist es ein Zufall, dass die Ableitung der Integralfunktion an irgendeiner Obergrenze ξ denselben Wert liefert, den wir auch erhalten würden, wenn wir ξ in die Ausgangsfunktion einsetzen?

$$F'(\xi) = \xi$$

und

$$f(\xi) = \xi.$$

Ist also

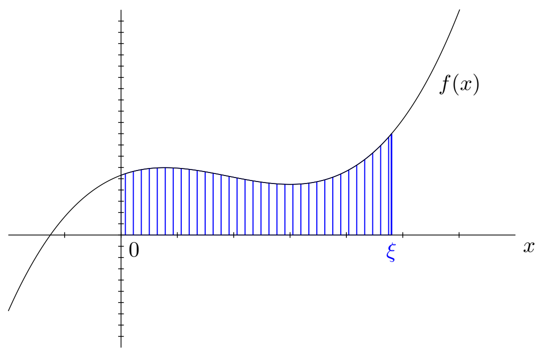
$$F'(\xi) = f(\xi)?$$

Was würde das denn bedeuten? Erinnern wir uns, dass wir die Bezeichnung $F(\xi)$ abkürzend für das Integral

$$\int_0^\xi f(x) \, \mathrm{d}x$$

eingeführt hatten. Wenn es wahr ist, dass stets $F'(\xi) = f(\xi)$ gilt, so hiesse das, dass die Integralfunktion (als Funktion der variablen Obergrenze) als Ableitung die Ausgangsfunktion (allerdings mit eingesetzter Obergrenze) hat. Und allmählich beginnt ein tiefliegender Schatz aufzuschimmern wie eine Kristallader nach langem Schürfen und Pickeln.

Gehen wir zum Schluss noch einmal zurück zu der Abbildung, mit der wir diese Überlegungen begonnen hatten:



Was würde es bedeuten, dass $F'(\xi) = f(\xi)$ ist? Die Funktion F sehen wir hier nicht abgebildet; wir kennen sie auch gar nicht, weil wir f nicht konkret kennen. F ist die Funktion, die irgendeinem ξ den Flächeninhalt zuordnet, den der f-Graph mit der x-Achse zwischen 0 und ξ einschliesst. $F'(\xi)$ kennen wir folglich auch nicht, aber wir wissen allgemein, dass $F'(\xi)$ ein Mass für die Steigung der Funktion F an der Stelle ξ ist. $F'(\xi)$ gibt an, um wie viel der Wert $F(\xi)$ zunimmt oder abnimmt, wenn wir uns von der Stelle ξ aus um ein winziges Inkrement nach rechts bewegen. Folglich würde die Gleichung $F'(\xi) = f(\xi)$ bedeuten, dass die momentane Änderung des F-Wertes an der Stelle ξ durch den Wert $f(\xi)$ bestimmt ist. Aber... das ist doch... Ist das nicht klar? Ist es nicht einsichtig, dass F an der Stelle ξ umso stärker wächst, je grösser $f(\xi)$ ist, weil ja dann besonders viel Fläche dazukommt, wenn wir uns von ξ aus um ein Inkrement nach rechts bewegen? Ist es nicht einsichtig, dass F an der Stelle ξ ein geringes momentanes Wachstum (oder gar ein Gefälle) hat, wenn $f(\xi)$ klein (oder negativ) ist? – All diese Überlegungen nähren in uns die Vermutung, dass wir es bald geschafft, dass wir den Hauptsatz bald verstanden haben ...

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – Teil 3

Wir haben im letzten Abschnitt mit der Integralfunktion

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

experimentiert und entdeckt, dass möglicherweise

$$\frac{dF}{d\xi} = f(\xi)$$

gilt. Wir haben dies an einfachen Beispielen entdeckt, und es ist alles andere als klar, dass wir damit einen allgemeingültigen Zusammenhang aufgespürt haben. Aber es ist so! Es gilt nämlich:

Satz: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung - 1. Fassung)
Sei f eine reellwertige und stetige Funktion, so ist ihre Integralfunktion

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(\xi).$$

Natürlich gehört es sich, dass wir diesen Satz beweisen; die Mathematik bietet die einmalige Chance, dass sich Behauptungen in ihr in der Regel auch beweisen lassen. Aber wir verschieben den Beweis noch etwas und kümmern uns zuerst um den praktischen Nutzen dieses Satzes. Inwiefern hilft er beim praktischen Integrieren?

Dazu betrachten wir ein Beispiel: Wir sollen

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Wie kann nun der schon im Voraus viel gerühmte Hauptsatz eingesetzt werden? Nun, zunächst gilt sicher

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x \tag{♥}$$

nach der früher besprochenen Eigenschaft (iii). Damit stehen wir vor dem Problem, bestimmte Integrale von 0 bis hin zu gewissen Obergrenzen berechnen zu müssen. Wir könnten uns also glücklich schätzen, wenn wir das bestimmte Integral der cos-Funktion von 0 bis hin zu einer *beliebigen Obergrenze* ξ bestimmen könnten, denn dann wären beide Integrale in (♥) gelöst. Es muss also unsere Aufgabe sein zu erfahren, was

$$\int_{0}^{\xi} \cos(x)\,\mathrm{d}x \tag{♥♥}$$

ist. Aber genau darüber gibt uns der Hauptsatz eine entscheidende Information: Er besagt nämlich, dass das Integral (♥♥), als Funktion in der Obergrenze ξ aufgefasst, als Ableitung gerade $f(\xi) = \cos(\xi)$ hat. Aber damit wissen wir alles! Wir kennen ja alle Funktionen, deren Ableitung (nach ξ) gleich $\cos(\xi)$ ist, d.h. alle Stammfunktionen von $\cos(\xi)$: Es sind nämlich die Funktionen $\sin(\xi) + c$. Also gilt:

$$\int_{0}^{\xi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(\xi) + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Mit diesem Wissen im Gepäck können wir nun zu (♥) zurückkehren und schliessen, dass

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x &= [\sin(\pi) + c] - [\sin(\pi/2) + c]\\ &= \sin(\pi) + c - \sin(\pi/2) - c\\ &= \sin(\pi) - \sin(\pi/2)\\ &= 0 - 1\\ &= -1\end{aligned}$$

ist. Damit ist das Integral erfolgreich berechnet.

Beschreiten wir diesen Weg noch einmal, aber diesmal allgemein, für eine beliebige Funktion $f(x)$. Es sei also

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Inwiefern hilft uns der Hauptsatz dabei?

Im ersten Schritt formen wir so um:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es muss also unsere Aufgabe sein, das bestimmte Integral der Grundfunktion von 0 bis hin zu irgendeiner Obergrenze ξ zu bestimmen, denn nur dann sind wir in der Lage, die beiden Integrale auf der rechten Seite anzugeben. Was ist also

$$\int_{0}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x?$$

Beim Hauptsatz werden wir fündig: Er gibt uns die wesentliche Information, dass dieses Integral, als Funktion in ξ, als Ableitung gerade $f(\xi)$ hat. Also ist

$$\int_{0}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Stammfunktion von $f(\xi)$. Da wir hier die Grundfunktion nicht konkret kennen, können wir eine solche Stammfunktion auch nicht konkret angeben, aber wir können sie immerhin benennen: Sei also $F(\xi)$ eine Stammfunktion von $f(\xi)$. Dann ist also

$$\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi).$$

Auf das c verzichten wir, da es ohnehin wegfällt - und somit

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Damit ist theoretisch jedes Integral bestimmt, sofern es uns gelingt, eine Stammfunktion zu der vorliegenden Grundfunktion zu finden.

An dieser Stelle kann eine entscheidende und willkommene Vereinfachung eingeführt werden: Wir können auf die eher mühsame Unterscheidung der beiden Variablen x und ξ verzichten. Die letzte Gleichung macht dies deutlich: Da wir in die Stammfunktion F ohnehin die beiden Grenzen a und b einsetzen, ist es einerlei, ob wir vorher $F(\xi)$ oder $F(x)$ schreiben (oder denken). Wir dürfen uns also die kleine Nachlässigkeit leisten und sagen:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Diese letzte Aussage haben wir direkt aus dem (noch immer unbewiesenen) Hauptsatz gewonnen; es ist nur eine andere Formulierung. Und deshalb notieren wir auch diese Aussage unter dem Titel „Hauptsatz“, diesmal aber als 2. Fassung:

Satz: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung - 2. Fassung)
Sei f eine reellwertige und stetige Funktion, und sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

Nun sind wir fast am Ende angelangt. Wir verstehen, dass die Berechnung eines Integrals genau dann gelingt, wenn eine Stammfunktion der Grundfunktion gefunden werden kann. Zu integrieren bedeutet nichts anderes, als eine Stammfunktion zu finden und darin einzusetzen. Heureka! Damit liegt der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung in aller Deutlichkeit vor uns. Es bleibt die Pendenz, den Hauptsatz zu beweisen:

Beweis des Hauptsatzes. Wir wählen wieder die Abkürzung

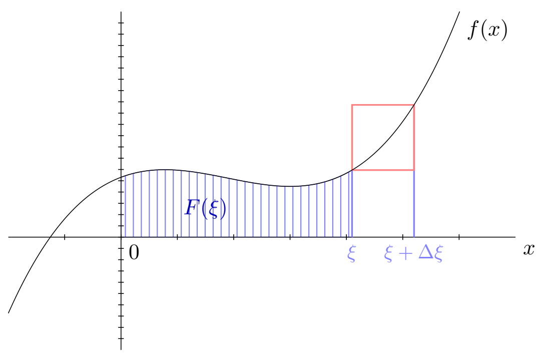
$$F(\xi) = \int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

In der ersten Fassung des Hauptsatzes (die wir hier beweisen) wird behauptet, dass die erste Ableitung dieser Integralfunktion nach ξ gleich $f(\xi)$ sei. Eine erste Ableitung ist durch den Differentialquotienten erklärt, also sollten wir den Ausdruck

$$\lim_{\Delta\xi\to 0}\left(\frac{F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi)}{\Delta\xi}\right)$$

bilden und überprüfen, ob er gleich $f(\xi)$ ist. Wir gehen so vor, dass wir erst den Zähler dieses Ausdrucks untersuchen, danach den Nenner dazu nehmen und schliesslich den Limes bilden:

Was lässt sich über den Zähler $F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi)$ sagen?



$F(\xi)$ ist das bestimmte Integral der Funktion f von 0 bis hin zur Stelle ξ (Schraffur). $F(\xi+\Delta\xi)$ ist das bestimmte Integral derselben Funktion von 0 bis hin zur Stelle $\xi+\Delta\xi$. Folglich ist $F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi)$ die Differenz beider, also der Zuwachs der Integralfunktion von ξ bis $\xi+\Delta\xi$. Diesen Zuwachs können wir folgendermassen von unten wie auch von oben abschätzen: Wir bezeichnen mit x_{min} bzw. mit x_{max} diejenige Stelle im Intervall $[\xi, \xi+\Delta\xi]$, deren Funktionswert (unter der Funktion f) minimal bzw. maximal ist. (In der Abbildung ist $x_{\text{min}}=\xi$ und $x_{\text{max}}=\xi+\Delta\xi$, aber natürlich hängt das vom konkreten Graphen ab. Ebenso gut könnten x_{min} und x_{max} an irgendwelchen anderen Stellen innerhalb des Intervalls sein) Dann ist natürlich

$$\begin{aligned} f(x_{\text{min}})\cdot\Delta\xi &\leqslant F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi) \\ &\leqslant f(x_{\text{max}})\cdot\Delta\xi. \end{aligned}$$

Division durch $\Delta\xi$ liefert nun:

$$f(x_{\text{min}}) \leqslant \frac{F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi)}{\Delta\xi} \leqslant f(x_{\text{max}}).$$

Nun lassen wir den Limes für $\Delta\xi\to 0$ wirken:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\xi\to 0} f(x_{\text{min}}) &\leqslant \frac{F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi)}{\Delta\xi} \\ &\leqslant \lim_{\Delta\xi\to 0} f(x_{\text{max}}). \end{aligned}$$

Was entsteht? Der mittlere Term, der Differentialquotient, ist natürlich die erste Ableitung, da die erste Ableitung gerade so definiert ist. Die beiden flankierenden Terme aber sind identisch gleich $f(\xi)$, da mit schrumpfendem $\Delta\xi$ die beiden Stellen $x_{\text{min}}, x_{\text{max}}$, wo immer im Intervall sie sein mögen, gegen den linken Rand, also die Stelle ξ, gedrängt werden. Folglich erhalten wir die bemerkenswerte Ungleichung

$$f(\xi) \leqslant F'(\xi) \leqslant f(\xi),$$

die einzig den Schluss zulässt, dass überall Gleichheiten herrschen, dass also $F'(\xi)=f(\xi)$ ist. Macht man noch die Abkürzung

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

rückgängig, erhält man genau den behaupteten Hauptsatz in der ersten Fassung. □

Alternativ könnte man auch mit dem Mittelwertsatz (iv) argumentieren: Nach dem Mittelwertsatz muss nämlich eine Stelle c im Intervall $[\xi, \xi+\Delta\xi]$ existieren, so dass

$$F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi) = f(c)\cdot\Delta\xi$$

und somit

$$\frac{F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi)}{\Delta\xi} = f(c)$$

ist. Beim Grenzübergang $\Delta\xi\to 0$ muss c offenbar zu ξ streben, so dass die Behauptung erneut folgt.

Wie schon gesagt, Newton und Leibniz waren die ersten, die die fundamentale Bedeutung dieses Satzes erkannten. Aber es gab Vordenker: So hat etwa Newtons Lehrer, Isaac Barrow, erkannt, dass ein Zusammenhang zwischen Flächen- und Tangentenberechnung existieren muss, und James Gregory publizierte 1667 in seinem Werk *Geometriae pars universalis* den Hauptsatz, ohne allerdings seine Bedeutung zu erkennen. Aufzeichnungen belegen, dass Newton den Satz erstmals 1666 formulierte, während Leibniz ihn im Jahr 1667 fast in der heutigen Form niederschrieb. Die heutige moderne Form fand der Satz in den Arbeiten von Cauchy. Im 20. Jahrhundert wurde der Satz samt Beweis sogar vertont, nämlich in der sogenannten Hauptsatzkantate.