Riemann-Summe und bestimmtes Integral

[Integralrechnung]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

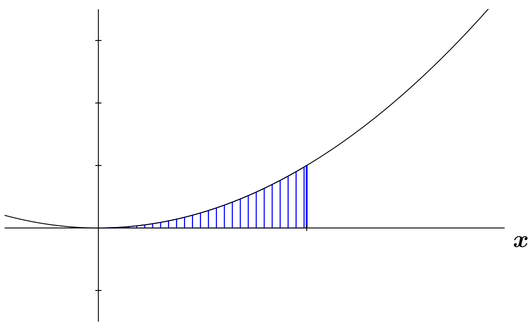
1 Armin P. Barth

2 Armin P. Barth

3 Armin P. Barth

Ein wenig Geschichte

Erste mathematische Arbeiten, die der Integralrechnung zugeordnet werden können, gehen weit zurück. *Archimedes* von Syrakus (287-212), einer der bedeutendsten Mathematiker des Altertums, löste das Problem, den Flächeninhalt eines Parabelsegments zu bestimmen. Es gelang ihm, in modernen Terminologie ausgedrückt, den Inhalt des Flächenstücks zu berechnen, das zwischen $x = 0$ und $x = 1$ von der x-Achse und dem Graphen von $f(x) = x^2$ begrenzt wird:



In dem folgenden Brief an Dositheus erwähnte er seine Leistung in nicht unbescheidener Weise:

> Archimedes grüsst Dositheus
>
> Als ich vernahm, dass Konon gestorben sei, der mir in nie versagender Freundschaft zugetan war, und dass du ihm nahe gestanden und selber ein erfahrener Mathematiker seist, da trauerte ich um den Verstorbenen, der mein Freund war und in der Mathematik Staunenswertes hervorgebracht hatte; zugleich nahm ich mir vor, einen Brief, den ich eigentlich an Konon senden wollte, nun an dich abgehen zu lassen. Er betrifft ein Theorem der Geometrie, welches bisher noch von niemand, sondern jetzt zuerst von mir untersucht worden ist, und zwar habe ich die Lösung zunächst mit Methoden der Mechanik gefunden, später fand ich einen rein geometrischen Beweis.
>
> Bereits haben einige Mathematiker das Problem behandelt, ein Polygon zu finden, dessen Inhalt einem Kreis oder einem Kreissegment gleich ist, und haben seine Lösbarkeit zu beweisen versucht. Dasselbe versuchten sie von einem Ellipsensegment zu zeigen, aber sie benutzten dabei Hilfssätze, die man nicht ohne weiteres zugeben kann, so dass ihnen von den meisten die Lösung nicht zuerkannt wurde. Die Quadratur eines Parabelsegmentes ist aber bisher meines Wissens noch von niemand versucht worden, und dieses Problem habe ich jetzt gelöst. Ich beweise nämlich, dass der Inhalt eines Parabelsegments vier Drittel des Dreiecks beträgt, welches mit dem Segment einerlei Basis und Höhe hat.

Tatsächlich berechnete Archimedes damit das Integral

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

eine Berechnung, die bald zu Ihren leichtesten Übungen zählen wird.

Das Fundament der Differential- und Integralrechnung, so wie wir sie heute kennen, wurde erst im 17. Jahrhundert gelegt. Auf Vorarbeiten von Pierre de *Fermat* (1601-1665) und anderen aufbauend schufen vor allem der englische Mathematiker Sir Isaac *Newton* (1643-1727) und der deutsche Universalgelehrte Gottfried Wilhelm *Leibniz* (1646-1716) die neue Theorie. Sie taten es unabhängig voneinander und in unterschiedlicher Ausprägung, so dass sich die zeitgenössischen Mathematiker in der Folge in zwei Lager spalteten, in die Anhänger der englischen (Newtonschen) und in die Anhänger der kontinentalen (Leibnizschen) Rechnungsart. Es entspann sich ein Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz, der zu den unrühmlichen Kapiteln der Mathematikgeschichte zählt.

Um diesen Streit nicht unnötig zu verlängern, lassen wir ihn hier ganz beiseite und stellen fest, dass beiden Forschern gleichermassen Anerkennung für die Entwicklung der heute so unverzichtbar gewordenen Differential- und Integralrechnung gebührt und vor allem dafür, dass sie als erste die überraschenden und tiefliegenden Zusammenhänge zwischen der Differentialrechnung und der Integralrechnung erkannten.

Es muss sofort betont werden, dass Newton und Leibniz die neue Theorie nicht in der heute üblichen formalen Strenge verwendeten. Es ist nur natürlich, dass eine neue Theorie erst dann eine ganz klare, vereinheitlichte und stringente Ausprägung gewinnt, wenn sie lange Zeit „en vogue“ gewesen ist und viele kritische Benutzer darüber sinniert und weitere Details beigefügt haben. Im Falle der Differential- und Integralrechnung breitete sich die neue Theorie sehr schnell in ganz Europa aus, nicht zuletzt dank der intensiven Korrespondenz, die Leibniz mit der Basler Mathematiker-Familie *Bernoulli* unterhielt. Zu den vielen Forschern, die der Differential- und Integralrechnung im 17. und 18. Jahrhundert zu ihrem Siegeszug verhalfen und wichtige Zusätze beisteuerten, zählten Guillaume François Antoine Marquis de *l'Hôpital* (1661-1704), Leonhard *Euler* (1707-1783), Jean le Rond *d'Alembert* (1717-1783), Joseph-Louis *Lagrange* (1736-1813) und andere.

Im 19. Jahrhundert setzten es sich zahlreiche Mathematiker zum Ziel, die Mathematik auf präzisere und solidere Grundlagen zu stellen. Eine Konsequenz dieses Bestrebens war, dass auch die Differential- und Integralrechnung präzisere Definitionen und strengere Denkweisen erhielten. Vor allem der französische Mathematiker Augustin-Louis *Cauchy* (1789-1857) und sein deutscher Kollege Karl *Weierstrass* (1815-1897) verhalfen der mittlerweile nicht mehr ganz neuen Theorie zu den heute üblichen strengen Formalismen. Cauchy war es zum Beispiel, der die Ableitung einer Funktion als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(falls er denn existiert) definierte, eine Definition, die Ihnen heute wohlvertraut ist. Cauchys Zugang zur Integralrechnung ist es auch, dem wir in diesem Text hauptsächlich folgen. Und bei Cauchy findet man schliesslich den ersten strengen Beweis des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung*. Diesem Satz werden auch wir viel Raum geben, denn in ihm bündeln sich die schon oben erwähnten Zusammenhänge, die die Differentialrechnung einerseits und die Integralrechnung andererseits zu einer einzigen einheitlichen Theorie verschmelzen lassen.

Ein phänomenologischer Zugang - drei Beispiele, die viel gemeinsam haben

Wir betrachten im Folgenden drei scheinbar unzusammenhängende Probleme. Wenn wir Wert darauf legen, das ihnen Gemeinsame zu sehen, so werden wir erkennen, dass jedes dieser Probleme letztlich auf dasselbe Berechnungsproblem führt, und ahnen, dass wohl eine schwindelerregende Fülle von Problemen aus Naturwissen-

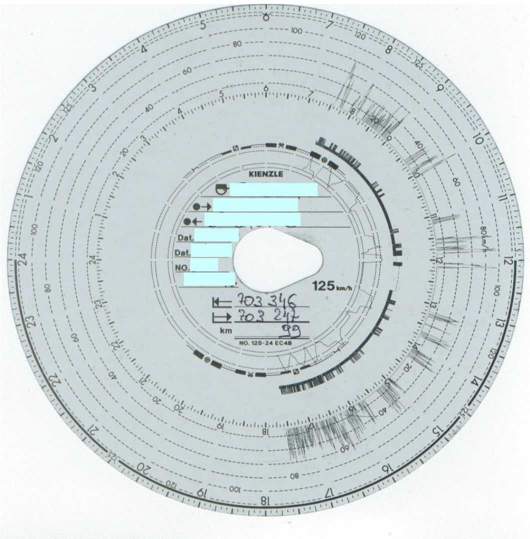


Abbildung 1: Tachograph

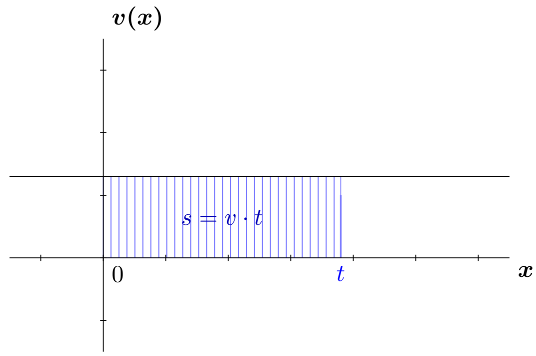
schaft und Technik auf ähnliche Berechnungsprobleme führen, die dann allesamt lösbar sind, sobald durch die Integralrechnung die nötigen Werkzeuge bereitgestellt sind.

Der Fahrtenschreiber

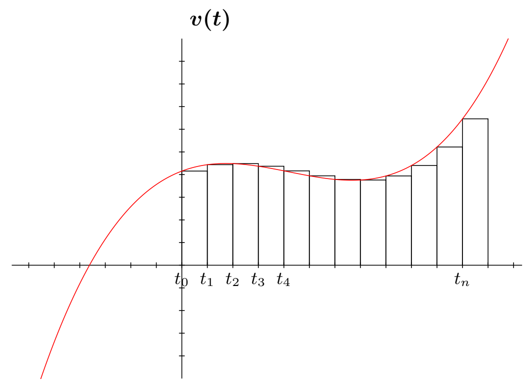
Die folgende Abbildung zeigt einen Fahrtenschreiber, wie er in vielen Bussen und LKWs eingebaut war. Er zeichnet die Geschwindigkeit des Fahrzeugs abhängig von der Zeit auf. Die Abbildung zeigt zudem eine Transformation der Aufzeichnung in ein kartesisches Koordinatensystem.

Die Frage ist: Kann aufgrund der Daten aus dem Fahrtenschreiber der vom Fahrzeug zurückgelegte Weg bestimmt werden?

Nun, wenn die Geschwindigkeit v in einem bestimmten Zeitabschnitt konstant ist, so berechnet sich der zurückgelegte Weg natürlich nach der Formel $s = v \cdot t$; und graphisch hiesse das einfach, den Inhalt der Rechteckfläche zu bestimmen, welche von dem v-Graphen, dem Zeitintervall und den vertikalen Berandungen gebildet wird:



Falls die Geschwindigkeit aber nicht konstant ist, was anzunehmen ist, so können wir den untersuchten Zeitabschnitt doch wenigstens in kleine Zeitintervalle Δt (z.B. $\Delta t = 1$ sec.) unterteilen und den v-Graphen mit Hilfe von kurzen horizontalen Strecken annähern:



Natürlich sind die horizontalen Strecken bloss eine sehr grobe Näherung des tatsächlichen Verlaufs der Geschwindigkeitskurve, aber wir können uns vorstellen, dass bei winzig kleinem Δt der Fehler vernachlässigbar sein dürfte. Entscheidend ist nun, dass innerhalb eines Δt-Intervalls die Geschwindigkeit ja dann konstant ist, nämlich gleich $v(t_i)$, und daraus folgt, dass der zurückgelegte Weg innerhalb des i-ten Intervalls ungefähr gleich $v(t_i) \cdot \Delta t$ ist, der Flächeninhalt des entsprechenden Rechtecks. Wenn wir uns Δt als fürs Auge kaum wahrnehmbar klein vorstellen, so wird einsichtig, dass die vom Fahrzeug in einer Zeit t zurückgelegte Strecke gleich dem Flächeninhalt unter der Kurve zwischen 0 und t sein muss. Ist also $v(t_i) \cdot \Delta t$ ein Näherungswert für die im Zeitintervall zwischen t_i und t_{i+1} zurückgelegte Strecke, so muss natürlich durch die Summe all dieser Werte eine Approximation der zurückgelegten Wegstrecke entstehen:

$$s \approx \sum_{i=0}^{n-1} v(t_i) \cdot \Delta t.$$

Und es ist einsichtig, dass diese Näherung desto genauer ist, je kleiner wir Δt wählen. Dies gibt uns das Vertrauen in die Behauptung, dass mit dem Term

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{bzw. } \Delta t\to 0}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} v(t_i) \cdot \Delta t \right)$$

die *exakte* Wegstrecke ausgedrückt ist. Wir summieren über immer mehr und immer kleinere Zeitintervalle und sind zuversichtlich, dadurch den Inhalt der Fläche unterhalb des v-Graphen (welche offenbar den zurückgelegten Weg darstellt) exakt erfassen zu können. Wir geben also als Lösung unseres ersten Problems

$$s = \lim_{\Delta t\to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} v(t_i) \cdot \Delta t \right)$$

an und verdrängen erst einmal das unangenehme Gefühl, dass eine konkrete Berechnung von s nach dieser Methode sehr mühsam wäre: Wir müssten die $v(t_i)$-Werte in Abständen von einer Sekunde (z.B.) aus dem v-Graphen herauslesen, alle mit Δt multiplizieren, dann alle addieren und danach dieses Verfahren mit immer kleineren Δt-Werten wiederholen. Das ist wahrlich nicht besonders attraktiv!

Berechnung des Kugelvolumens

Die Berechnung des Kugelvolumens scheint auf den ersten Blick nicht einfach zu sein. Würfel, Quader, Prismen, Pyramiden erscheinen einfacher, denn dort haben wir es nicht mit gekrümmten Berandungsflächen zu tun. Gleichwohl könnte uns eine Idee einfallen, die der in folgender Abbildung (aus einem alten chinesischen Mathematikbuch) gezeigten Idee zur Berechnung der Kreisfläche sehr ähnlich ist:

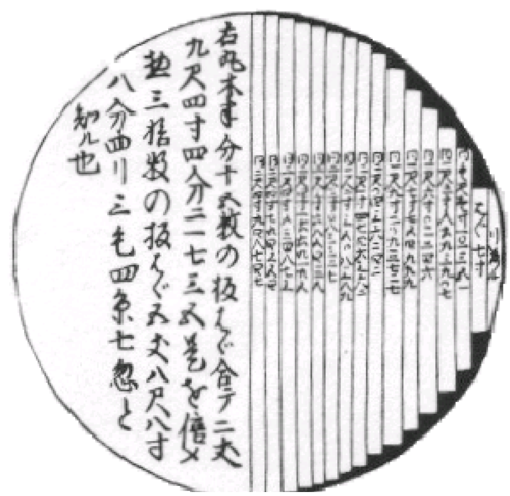
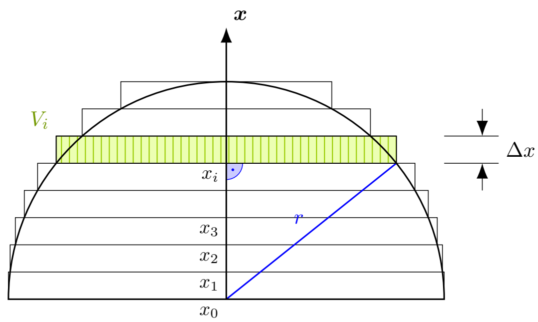


Abbildung 2: Berechnung Kreisfläche

Es könnte uns einfallen, die Kugel (oder die Halbkugel) in dünne zylindrische Scheiben zu unterteilen, um damit das gesuchte Volumen wenigstens näherungsweise zu bestimmen.

Legen wir also die x-Achse wie in untenstehender Handskizze, so wird die Unterteilung der Kugel in n zylindrische Scheiben der Höhe Δx durch die Unterteilungspunkte $x_0 (= 0), x_1, x_2, \ldots, x_n (= r)$ geleistet. Welches Volumen hat die i-te zylindrische Scheibe? Nun, offenbar ist $V_i = \pi \cdot \text{Radius}^2 \cdot \Delta x$. Wie gross ist der Radius der i-ten Scheibe?



Der Grundkreisradius der i-ten Scheibe beträgt

$$\sqrt{r^2 - x_i^2},$$

so dass also

$$V_i = \pi(r^2 - x_i^2) \cdot \Delta x$$

beträgt. Addieren wir die Volumina aller Scheiben, so erhalten wir einen Wert, von dem wir annehmen, dass er das Kugelvolumen recht gut approximiert, vor allem dann, wenn Δx sehr klein (bzw. n sehr gross) ist:

$$V_{\text{Kugel}} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi \left(r^2 - x_i^2\right) \cdot \Delta x.$$

Wiederum vertrauen wir darauf, dass mit kleiner werdendem Δx eine immer genauere Annäherung an das tatsächliche Kugelvolumen erfolgt, so dass wir ohne zu zögern behaupten:

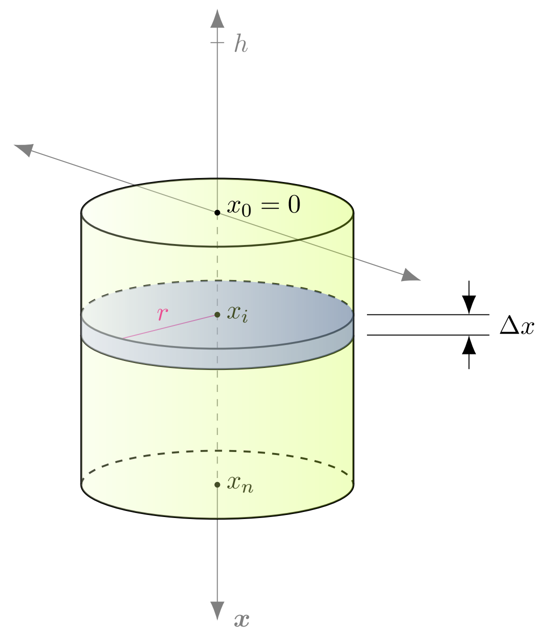
$$V_{\text{Kugel}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \pi \left(r^2 - x_i^2\right) \cdot \Delta x \right).$$

Erneut bleibt das unangenehme Gefühl zurück, dass wir Mühe hätten, diesen Term für eine konkrete Kugel (also ein konkretes r) zu berechnen, aber wenigstens stellt er einen greifbaren Anfang dar.

Arbeit einer Pumpe

Die folgende Abbildung zeigt einen Zylinder voller Flüssigkeit. Mit Hilfe einer Pumpe soll die gesamte Flüssigkeit auf das Niveau h gepumpt werden. Welche Arbeit müsste eine solche Pumpe leisten? Zur Erinnerung:

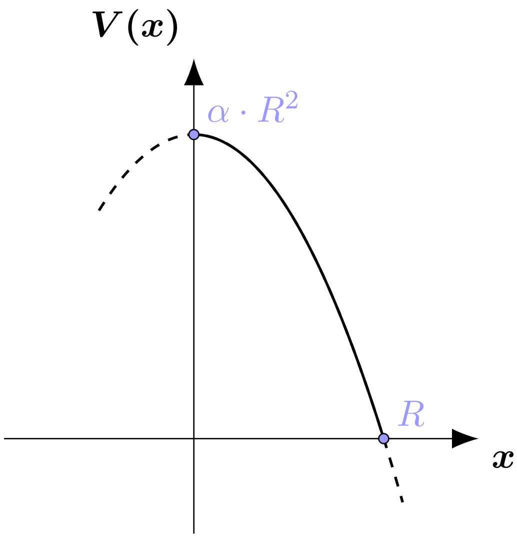
$$\text{Arbeit} = (\text{Kraft parallel zum Weg}) \times (\text{Weg}).$$



Wir wählen (im Sinne eines mathematischen Modells) den Ansatz, dass die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsmoleküls im Abstand x von der Rohrachse gleich

$$v(x) = \alpha \cdot \left(R^2 - x^2\right) = \alpha \cdot R^2 - \alpha \cdot x^2$$

ist.



Wir haben im ersten Beispiel erfolgreich das Zeitintervall zerstückelt und im zweiten Beispiel ebenso erfolgreich den Kugelradius; es spricht also vieles dafür, mit der Zerstückelung fortzufahren. Wir unterteilen also den Flüssigkeitszylinder in dünne „Flüssigkeitsscheiben“ der Dicke Δx (gebildet durch die Unterteilungspunkte $x_0(=0), x_1, x_2, \ldots, x_n(=$ Zylinderhöhe) und fragen uns, welche physikalische Arbeit wohl nötig ist, um die i-te Scheibe in die Höhe h zu transportieren: Nun, natürlich muss die Pumpe die Gewichtskraft $\left(\pi r^2 \cdot \Delta x\right) \cdot \rho \cdot g$ aufbringen, wobei $r =$Zylinderradius, $\rho =$Dichte der Flüssigkeit und $g =$Erdbeschleunigung ist. Da die Flüssigkeit ausserdem den Weg $x_i + h$ zurücklegen muss, kann die für die i-te Scheibe nötige Arbeit durch

$$\pi r^2 \cdot \Delta x \cdot \rho g \cdot (x_i + h)$$

ausgedrückt werden! Die Gesamtarbeit, die die Pumpe zu leisten hat, kann dann durch den Term

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\pi r^2 \rho g \cdot (x_i + h) \cdot \Delta x\right)$$

angenähert werden, wobei wir diese Näherung wiederum für desto genauer halten, je kleiner Δx (bzw. je grösser n) ist. Deshalb halten wir den Term

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\pi r^2 \rho g \cdot (x_i + h) \cdot \Delta x\right) \right)$$

für eine exakte Darstellung der Pumpenarbeit.

Stellen wir die drei Antworten auf die nun besprochenen Probleme noch einmal zusammen, so ist es unmöglich, das allen Gemeinsame nicht zu sehen:

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} v(t_i) \cdot \Delta t \right) \\ V_{\text{Kugel}} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \pi \left(r^2 - x_i^2\right) \cdot \Delta x \right) \\ A &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\pi r^2 \rho g \cdot (x_i + h) \cdot \Delta x\right) \right). \end{aligned}$$

Nennen wir auch im ersten Beispiel die Zeitvariable x statt t, so hat jeder dieser Terme die Gestalt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\ldots) \cdot \Delta x \right);$$

der Inhalt der inneren Klammer ist in jedem Fall eine Funktion in x, die an unzähligen Stellen ausgewertet wird. Nennen wir diese Funktion allgemein f, so haben alle Antworten die Gestalt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x \right), \qquad (\star)$$

und es scheint sich abzuzeichnen, dass Termen dieser Art eine besondere Bedeutung zukommt, dass es sich lohnt, sie zu studieren. Es ist eine für die Mathematik sehr typische Vorgehensweise, dass sie viele unter einem bestimmten Gesichtspunkt als identisch erscheinende Phänomene zum Anlass nimmt, sie gemeinsam zu studieren, alles, was ihnen an Speziellem anhaftet, zu abstrahieren und zu dem gemeinsamen Kern eine Theorie auszuarbeiten. So ist es ja eigentlich unwichtig, ob wir nun konkret von einem Fahrtenschreiber, einem Kugelvolumen oder einer Pumpenarbeit reden; entscheidend ist nur, dass wir mit Termen der Art ($\star$) umgehen können; wenn uns das gelingt, dann lösen wir all diese Problem und zahllose andere aufs Mal.

Terme dieser Art nennt man *Riemann-Summen*, benannt nach dem deutschen Mathematiker Bernhard *Riemann* (1826 - 1866).

Definition bestimmtes Integral

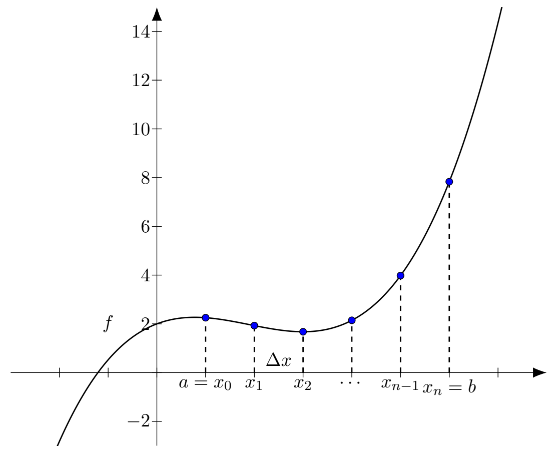
Motiviert durch die drei obigen Beispiele ist die folgende Definition nun naheliegend:

Definition:
Sei $f(x)$ eine (stetige, reelle) Funktion und $[a, b]$ ein Intervall, welches Teilmenge der Definitionsmenge von f ist. Ferner werde das Intervall $[a, b]$ durch die Unterteilungspunkte $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ in n Teilintervalle der Breite Δx unterteilt mit $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ für alle $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ bzw. n \to \infty}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

*als das **bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$.*

Dabei heissen a, b **Integrationsgrenzen**, es ist $\int$ das **Integrationszeichen**, und $f(x)$ heisst **Integrand**. Dieser besteht also aus der zu integrierenden Funktion, und dahinter gibt das Symbol $\mathrm{d}x$ an, welches die Integrationsvariable ist. Insbesondere ist ein bestimmtes Integral also stets eine reelle Zahl.



Die heute gebräuchliche Integralschreibweise geht auf *Leibniz* zurück. In dem unten abgebildeten Ausschnitt eines Leibniz-Manuskriptes aus dem Jahr 1675 kann bei genauem Hinsehen das älteste bekannte Integralzeichen entdeckt werden:

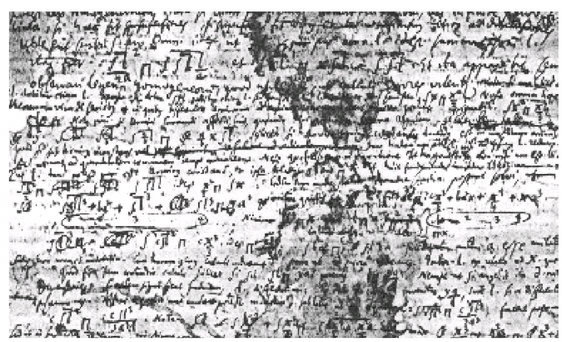


Abbildung 3: Ausschnitt aus dem Leibniz Manuskript, 1675

Zunächst ist es offensichtlich, dass wir bei der Definition lediglich den in den eingangs besprochenen Beispielen immer wieder vorkommenden Term abgekürzt haben. Damit ist weder klar, wie sich ein bestimmtes Integral konkret berechnen lässt - Diesbezüglich könnte man Übles ahnen - noch, was ein Integral ausser einer zurückgelegten Wegstrecke, eines Kugelvolumen und einer Pumpleistung sonst noch bedeuten könnte. Beidem widmen wir uns in der Folge.

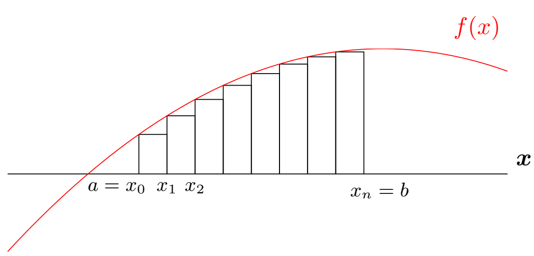
Geometrische Interpretation

Hier liefern wir eine weitere Interpretation des bestimmten Integrals, indem wir zeigen, dass es einen von der x-Achse und einem Funktionsgraphen begrenzten Flächeninhalt bedeuten kann.

Dazu nehmen wir zunächst an, $f(x)$ sei irgendeine im Intervall $[a, b]$ stetige, positive und monoton wachsende Funktion. Wie lässt sich dann der in der Integral-Definition benutzte Term

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

anschaulich interpretieren?



Ausgeschrieben ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x =$$

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

Der erste Summand entspricht offenbar dem Flächeninhalt des ersten Rechtecks, da die Breite dieses (und jedes) Rechtecks Δx beträgt und die Höhe dem Funktionswert an der Stelle x_0 entspricht. Der zweite Summand drückt dann den Flächeninhalt des zweiten Rechtecks usw., und der letzte Summand drückt den Flächeninhalt des letzten Rechtecks aus. Insgesamt ist also

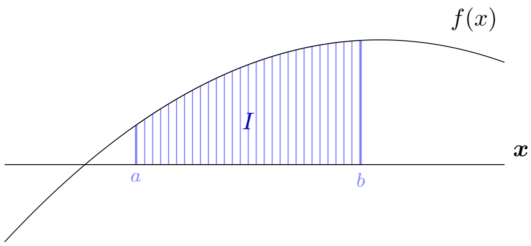
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \text{ Summe aller Rechtecksflächen im Intervall } [a, b] \, .$$

Soll der Inhalt I der von x-Achse und Graph im Intervall $[a, b]$ eingeschlossenen Fläche bestimmt werden, so ist dieser Term offenbar eine *Approximation von unten* und wird daher *Untersumme* U_n genannt.

$$\forall n : U_n \leqslant I.$$

Die Untersumme ist etwas kleiner als der genannte Flächeninhalt unter dem Graphen, aber bei grossem n (bzw. kleinem Δx) scheint es klar, dass, wenn wir dem Term noch den $\lim_{\Delta x \to 0}$ voranstellen, exakt der Inhalt der von x-Achse und Graph im Intervall $[a, b]$ begrenzten Fläche entsteht. Somit gilt also in *diesem* Fall (d.h. für eine im Intervall $[a, b]$ positive und monoton wachsende Funktion), dass

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = I = \text{ Inhalt der von } x\text{-Achse und Graph im Intervall } [a, b] \text{ begrenzten Fläche.}$$



In analoger Weise wird klar, dass hier (!) der Term

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

den Flächeninhalt I von oben approximiert; er ist somit eine *Obersumme* O_n . Und es kann leicht gezeigt werden, dass $U_n \leqslant I \leqslant O_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ und dass

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{bzw. } \Delta x\to 0}} U_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{bzw. } \Delta x\to 0}} O_n.$$

Eine Konsequenz ist, dass diese beiden Limites gleich I sind. Und damit ist streng nachgewiesen, dass in der vorliegenden Situation tatsächlich

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$$

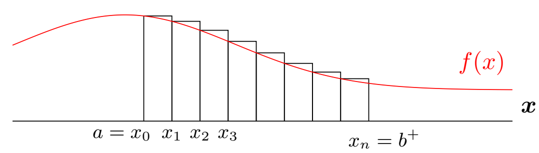
gilt.

Die Einschränkung, eine positive und monoton wachsende Funktion zu wählen, erscheint etwas willkürlich. Man wird sich fragen, ob sich das oben Gesagte nicht auf beliebige stetige Funktionen erweitern lässt. Nun, dabei ist erhöhte Vorsicht angebracht. Wir lassen die Einschränkungen (ausser der Stetigkeit) nun schrittweise fallen und untersuchen, ob das Integral noch immer den Inhalt eines von x-Achse und Graph im Intervall $[a, b]$ begrenzten Flächenstücks bedeutet:

Ist $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ positiv und monoton *fallend*, so ist die Sachlage sehr ähnlich. Der in der Integraldefinition benutzte Term

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

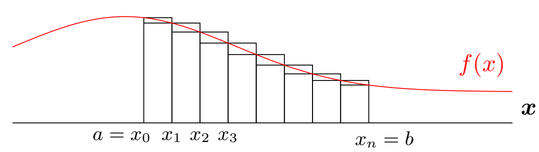
stellt wiederum eine Summe von Rechtecksflächen dar, aber diesmal „überlappen“ die Rechtecke den Graphen, d.h. dieser Term stellt nun eine Obersumme dar!



Dagegen drückt nun der Term

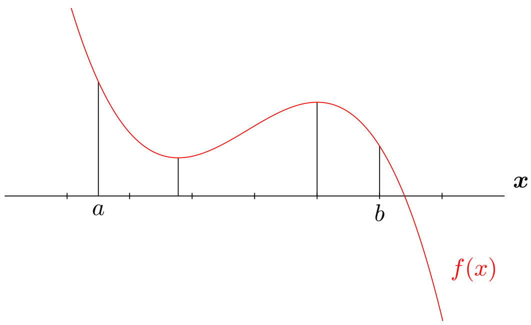
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

der vorher Obersumme war, eine Untersumme aus:

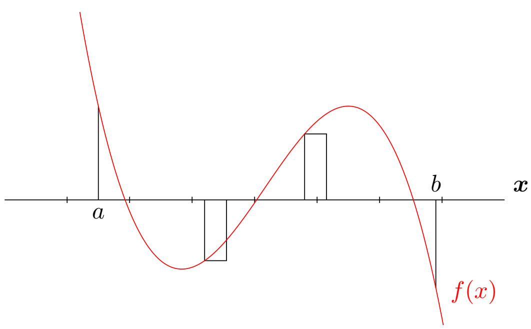


Insgesamt liegt also dieselbe Situation vor wie bei der monoton wachsenden Funktion, allerdings mit vertauschten Rollen. Es ist also ohne Zweifel wiederum so, dass die Limites von Ober- und Untersumme (für $n \to \infty$) identisch und gleich dem von x-Achse und Graph begrenzten Flächeninhalt sind.

Ist $f(x)$ bloss positiv (und stetig), so kann der Graph Achterbahn fahren; es können innerhalb des Intervalls $[a, b]$ wachsende und fallende Abschnitte sich abwechseln. Drückt dann das Integral noch immer den Flächeninhalt unter der Kurve aus? Nun, das scheint ziemlich klar. Wir können ja das Intervall $[a, b]$ so unterteilen, dass der Graph in jedem Abschnitt entweder monoton wachsend oder aber streng monoton fallend ist. Für jeden dieser Abschnitte gilt dann das oben Gesagte, so dass insgesamt das Integral wiederum den Flächeninhalt unter der Kurve ausdrückt.



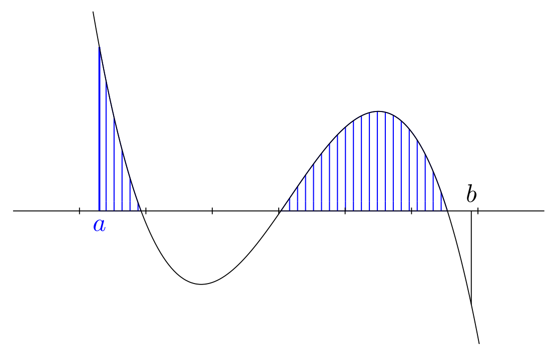
Nun erlauben wir der Funktion, ganz beliebig zu sein. Auf der Stetigkeit beharren wir aber schon. Insbesondere darf der Graph innerhalb des Intervalls $[a, b]$ beliebig in die beiden Halbebenen oberhalb und unterhalb der x-Achse schwingen. Kann man noch immer sagen, das Integral drücke einen Flächeninhalt aus?



Per definitionem ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x\right).$$

Alle Summanden haben typischerweise die Form $f(x_i)\cdot\Delta x$, d.h. Funktionswert $\times$ Intervallbreite. Da nun aber die Funktion sowohl positive als auch negative Funktionswerte aufweisen kann, gibt es folglich Summanden, die positiv, und andere, die negativ in die Summe eingehen. (In der Abb. ist je ein „positives Rechteck“ und ein „negatives Rechteck“ eingetragen.) Insgesamt hat die Summe dann einen Wert, der *irgendwie* aus positiven und negativen Anteilen entsteht. Mit Sicherheit drückt die Summe aber *nicht* den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse aus. In der Tat werden alle Rechtecke, die im schraffierten Teil der untenstehenden Abbildung liegen, positiv in die Rechnung eingehen, und alle anderen negativ:



All diese Überlegungen haben in uns die Erkenntnis erzeugt, dass ein Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

nebst einer zurückgelegten Wegstrecke, einem Kugelvolumen, einer Pumpleistung (und vielen anderen Grössen, die wir zum Teil besprechen werden) auch den Inhalt einer von x-Achse und Graph begrenzten Fläche ausdrücken kann. Kann! Dieses „kann“ ist sehr wichtig. Es klappt eben nur, wenn die Funktion im betrachteten Intervall positiv ist, nicht aber, wenn sie in diesem Intervall beliebig vom Positiven ins Negative und umgekehrt wechselt. Wir wollen nicht verschweigen, dass es auch klappt, wenn die Funktion im Intervall stets negativ ist. Dann allerdings drückt das Integral natürlich den negativen Flächeninhalt aus!

MERKE:

$$f(x) > 0 \text{ in } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$$
$$f(x) < 0 \text{ in } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = I.$$

Dabei bezeichnet I den Inhalt der im Intervall $[a,b]$ von der x-Achse und dem Graphen begrenzten Fläche.

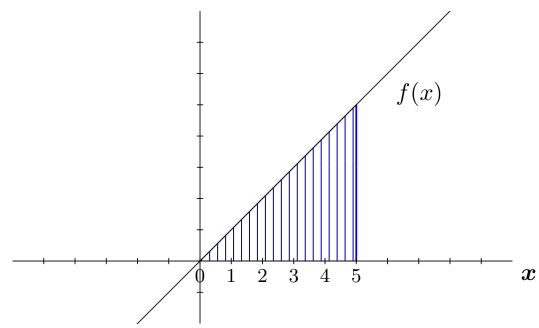
Berechnung eines Integrals von Hand

Sie werden jetzt enttäuscht sein! Die Integralberechnung, die wir hier zeigen, ist mühsam und unattraktiv. Das liegt daran, dass wir von einem Integral bisher wenig mehr wissen als seine Definition. Es bleibt uns also nichts anderes übrig, als genau der Definition zu folgen, wenn wir ein konkretes Integral bestimmen wollen. Um Sie etwas versöhnlicher zu stimmen, sei aber schon jetzt gesagt, dass wir es dabei natürlich nicht bewenden lassen werden; wir werden Wege finden, Integrale wesentlich einfacher zu berechnen, doch dazu werden wir den raffiniert ausgelegten Wegweisern folgen müssen, die sich aus dem sog. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* ergeben. Dort wird sich dann die schon mehrfach erwähnte Symbiose zwischen Differentialrechnung und Integralrechnung einstellen. Nun aber zuerst zum steilen und steinigen Weg:

Wir machen es uns zur Aufgabe,

$$\int_0^5 x\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Es handelt sich also um das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = x$ im Intervall $[0,5]$. Wenn wir uns die graphische Situation vor Augen führen, wird die Aufgabe lächerlich einfach:



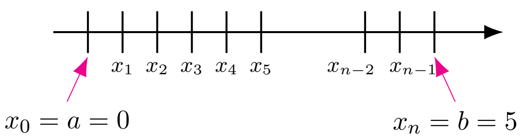
Die Funktion ist positiv im angegebenen Intervall, also drückt das Integral gerade den Flächeninhalt unter der Kurve aus. Da diese Fläche aber die Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat, ist die Aufgabe trivial: Die schraffierte Dreiecksfläche beträgt $(1/2)\cdot 5\cdot 5 = 12.5$, also ist

$$\int_0^5 x\,\mathrm{d}x = 12.5.$$

Was soll daran schwierig sein? Nun, die Berechnung gestaltet sich schwieriger, wenn wir unser graphisches Verständnis ausblenden und stur der Definition des Integrals folgen: Mit $f(x) = x$ lautet die Definition des Integrals so:

$$\begin{aligned}\int_0^5 x\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i\cdot\Delta x\right).\end{aligned} \qquad (\heartsuit)$$

Die x_i sind die Unterteilungsstellen des Intervalls, in diesem Fall des Intervalls $[0, 5]$; Δx ist die Breite eines dieser Teilintervalle.



Also ist $\Delta x = 5/n$, da insgesamt n Teilintervalle unterzubringen sind, und $x_i = i \cdot (5/n)$. Somit ergibt sich aus (♥) nun:

$$\begin{aligned}
&\int_0^5 x \,\mathrm{d}x \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} (x_0 \cdot \Delta x + x_1 \cdot \Delta x + \ldots + x_{n-1} \cdot \Delta x) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left(0 \cdot \frac{5}{n} \cdot \frac{5}{n} + \ldots + (n-1) \cdot \frac{5}{n} \cdot \frac{5}{n}\right) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{5}{n}\right)^2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))\right]
\end{aligned}$$

Sie sehen, dass endlich ein berechenbarer Term entstanden ist. Den Grenzwert des geklammerten Terms für $n \to \infty$ sollten wir berechnen können, und natürlich muss er den Wert 12.5 liefern, da wir den Integralwert bereits wissen.

Zunächst lässt sich die Summe

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$$

vereinfachen zu

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^5 x \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{5}{n}\right)^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{25}{2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(12.5 \cdot \frac{n^2 - n}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Da

$$\frac{n^2 - n}{n^2}$$

für wachsendes n Grenzwert 1 hat, ergibt sich wie erwartet

$$\int_0^5 x \,\mathrm{d}x = 12.5.$$

Diese Art von Berechnung ist offenkundig unbefriedigend. Wenn sich schon die Berechnung eines so einfachen Integrals so aufwändig gestaltet, dann wird uns beim Gedanken an kompliziertere Integrale schwindlig. Wenn aber ein Sinn darin liegt, einige wenige (!) Integrale auf diese Weise zu berechnen, so der, dass die Definition konkret und detailliert nachvollzogen und damit besser verstanden wird. Deshalb sei Ihnen wärmstens empfohlen, nun dasselbe mit den folgenden Integralen zu versuchen:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x, \\
&\int_0^{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Heute scheint es angebracht, die Möglichkeiten zu nutzen, die uns die Technik bietet. Wir stellen daher noch einen Pseudocode-Algorithmus her, der in der Lage ist, Integrale näherungsweise zu berechnen. Die Grundidee dabei ist, dass wir die Integrationsgrenzen a und b sowie die Anzahl n von Teilintervallen eingeben können und dass dann der Algorithmus den Wert der Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

bestimmt. Da die Limes-Berechnung fehlt, können wir keine exakten Ergebnisse erwarten; wenn wir aber n sehr gross wählen, dürften die

Resultate befriedigend sein. Wir benutzen also, dass für grosse n

$$\int_a^b x \, \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x.$$

ist. Nun zum Algorithmus:

Algorithmus 1 : Integral()

Data : f Funktion $(***)$, a untere Grenze; b obere Grenze; n Anzahl Rechtecke
Result : I zeigt den ungefähren Wert des Integrals an

```
δ ← (b − a)/n      // Anzahl Rechtecke;
I ← 0         // Setzt den Wert für das
 Integral auf 0 ;
for i ← 0 to n − 1 do
    x ← a + i · δ ;
    y ← f(x) ;
    I ← I + y · δ ;
end
```

Untersuchen Sie das Programm, und verbessern Sie es allenfalls. Probieren Sie es aus, indem Sie anstelle der drei Sterne die Funktion $\sin(x)$ eingeben und $a = 0, b = \pi$ wählen. Wie gut ist der Programmoutput verglichen mit dem exakten Integralwert

$$\int_0^\pi \sin(x) \, \mathrm{d}x = 2?$$

Untersuchen Sie auch die Integrale

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$
$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2} \; \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$