Differentiationsregeln II

[Differentialrechnung]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 Armin P. Barth

2 Armin P. Barth

Kettenregel

Kommen wir nun zu den *verschachtelten Funktionen*. Man spricht auch von *Verkettungen* oder der *Komposition* zweier (oder mehrerer) Funktionen. Sind $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{D}_g \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, so dass das Bild von f in $\mathbb{D}_g$ enthalten ist, so kann man ja auf jeden Funktionswert von f die Funktion g anwenden. Es ist also die Funktion

$$g \circ f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$$

erklärt, die jedem Wert $x \in \mathbb{D}_f$ den Wert $g(f(x))$ zuordnet. Und dabei geht eben nichts schief, weil wir verlangen, dass jeder Funktionswert von f zulässig für die Funktion g sein soll.

Verschachtelte Funktionen sind überaus häufig. Betrachten wir ein paar Beispiele:

$$\begin{aligned} k_1(x) &= \sin\left(x^2\right), \\ k_2(x) &= \mathrm{e}^{-0.5 \cdot x}, \\ k_3(x) &= \sin\left(\cos\left(\pi \cdot x\right)\right). \end{aligned}$$

Versuchen wir, die Arbeitsweise der ersten Beispielfunktion genau zu verstehen. Wird ihr ein reeller Input x vorgesetzt, so wird sie diesen zuerst quadrieren. Der Prozess des Quadrierens ist selber Wirkung einer Funktion, der sogenannten *inneren Funktion*. Wir können uns also denken, dass x zuerst der inneren Funktion $f(x) = x^2$ „gefüttert" wird. Erst danach, keinesfalls vorher, wird die sogenannte *äussere Funktion* ausgeübt, die einen Funktionswert der inneren Funktion zum Input nimmt und darauf die Sinusfunktion anwendet. Ein Funktionswert von k_1 kann also so dargestellt werden:

$$k_1(x) = g\left(f(x)\right),$$

wenn $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(x)$ ist. Die Reihenfolge der Ausübung der einzelnen Funktionen bei einer Verkettung muss unbedingt beachtet werden. So wäre es ja nicht dieselbe Funktion, würde man auf x zuerst g und dann f anwenden. Das Resultat dieser Reihenfolge wäre nämlich die Funktion

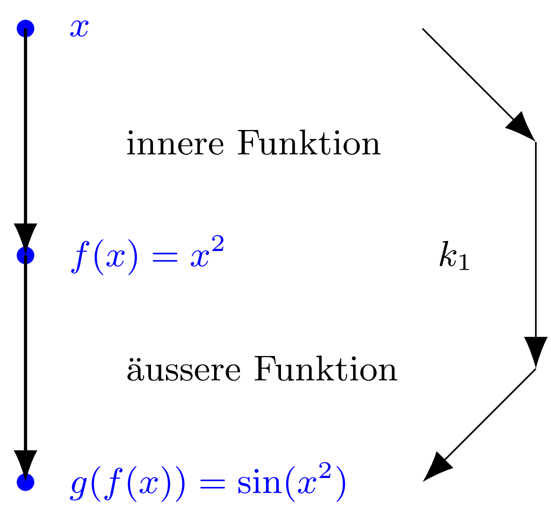
$$k_4(x) = \left(\sin\left(x\right)\right)^2,$$

und es ist offensichtlich, dass k_1 und k_4 nicht dieselbe Funktion sind.

Man sagt: *Die Komposition von Funktionen ist nicht kommutativ.*

Wenn wir uns der Reihenfolge der an einer Komposition beteiligten Funktionen bewusst sind, werden wir beim Ableiten kaum Fehler machen. Diese Reihenfolge aber nicht genauestens zu befolgen, kann häufig zu fehlerhaften Ableitungen führen.

Zusammengefasst:



Auch bei den anderen Beispielfunktionen ist es entscheidend, dass wir uns der Reihenfolge der ausgeführten Operationen bewusst werden, um das Wesen der Verschachtelung genau zu erfassen:

Die Funktion k_2 kann in der Form

$$k_2(x) = g\left(f(x)\right)$$

geschrieben werden mit der inneren Funktion $f(x) = -0.5 \cdot x$ und der äusseren Funktion $g(x) = \mathrm{e}^x$.

Die dritte Funktion ist sogar eine Dreifachverschachtelung:

$$k_3(x) = h\left(g\left(f(x)\right)\right)$$

mit der innersten Funktion $f(x) = \pi \cdot x$, der zweitinnersten (und gleichzeitig zweitäussersten) Funktion $g(x) = \cos(x)$ und der äussersten Funktion $h(x) = \sin(x)$.

Verschachtelungen von Funktionen haben eine gewisse Verwandtschaft zu Matrjoschkas. Auch dort gibt es eine klar definierte Reihenfolge, und es ist klar, welche Figur innen und welche aussen ist. Beim Ableiten einer Verkettung wird uns diese Verwandtschaft besonders nützlich sein. Will man an die innere(n) Figur(en) herankommen, muss man sich ja zuerst mit der äussersten beschäftigen, und genau dieses Prinzip werden wir beim Differenzieren strikte befolgen müssen.

Es gilt nämlich die folgende Regel:

Satz: (Kettenregel)
Sei

$$k(x) = g\left(f(x)\right) = \left(g \circ f\right)(x)$$

mit $\mathbb{W}_f \subset \mathbb{D}_g$. *Ist* f *an der Stelle* x *und* g *an der Stelle* $f(x)$ *differenzierbar, so ist auch* k *an der Stelle* x *differenzierbar, und es gilt:*

$$k'(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x).$$

Um eine Komposition $k(x) = g\left(f(x)\right)$ abzuleiten, müssen wir also zuerst die Ableitung

Abbildung 1: Babuschka

der äusseren Funktion bilden (uns mit der äussersten Figur beschäftigen) und diese an der Stelle $f(x)$ auswerten; dann haben wir den eben erhaltenen Term noch mit der Ableitung der inneren Funktion zu multiplizieren. Man sagt: *Man leitet von aussen nach innen ab.* Handelt es sich um eine dreifache oder noch tiefere Verschachtelung, so wird dieses Prinzip rekursiv angewendet, also: Für

$$k(x) = h\left(g\left(f(x)\right)\right)$$

ist

$$k'(x) = h'\left(g\left(f(x)\right)\right) \cdot g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$$

und so weiter. Was sind also die korrekten Ableitungen der drei Beispielfunktionen? Für $k_1(x) = \sin\left(x^2\right)$ ist

$$\begin{aligned} k_1'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, & \\ g'(f(x)) &= \cos(x^2), & \text{(äussere Ableitung)} \\ f'(x) &= 2x & \text{(innere Ableitung).} \end{aligned}$$

Für $k_2(x) = \mathrm{e}^{-0.5\cdot x}$ ist

$$\begin{aligned} k_2'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \mathrm{e}^{-0.5\cdot x} \cdot (-0.5 \cdot x) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.5 \cdot x, & \\ g'(f(x)) &= \mathrm{e}^{-0.5\cdot x} & \text{(äussere Ableitung)}, \\ f'(x) &= -0.5 & \text{(innere Ableitung)}. \end{aligned}$$

Für $k_3'(x) = \sin(\cos(\pi \cdot x))$ ist

$$\begin{aligned} k_3'(x) &= h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(\cos(\pi \cdot x)) \cdot (-\sin(\pi \cdot x)) \cdot \pi \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi \cdot x, & \\ h'(g(f(x))) &= \cos(\cos(\pi \cdot x)) & \text{(äusserste Abl.)}, \\ g'(f(x)) &= -\sin(\pi \cdot x) & \text{(mittlere Abl.)}, \\ f'(x) &= \pi & \text{(innerste Abl.)}. \end{aligned}$$

Es ist wie beim Schälen von Zwiebeln, wo man die einzelnen Schalen von aussen nach innen abschält. Man muss sich bei solchen Funktionen über den Schichtaufbau im Klaren sein und immer erst die äusserste „Schicht" ableiten und erst dann, wenn das getan ist, sich rekursiv der nächsten Schicht zuwenden.

Der Name „Kettenregel" lässt eine gewisse Verwandtschaft auch zu Kettenreaktionen vermuten. Und in der Tat lässt sich eine solche leicht herstellen. Betrachten wir einmal die folgende Kettenreaktion, in der das grösste Zahnrad seine Drehungen an ein zweites Rad und indirekt an ein drittes Rad weiterleitet.

Legen wir weiter fest, dass bei x Umdrehungen des ersten Rades das zweite $f(x) = 2$ volle Umdrehungen und dass bei x Umdrehungen

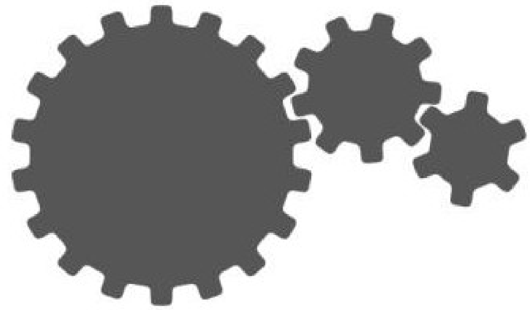


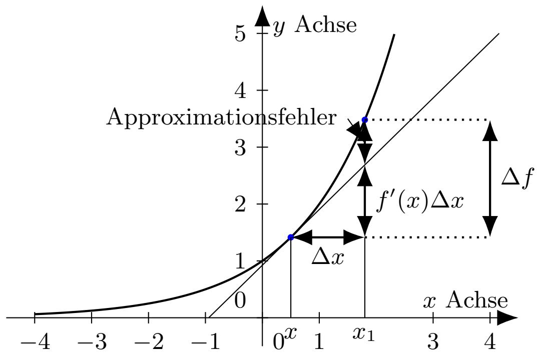
Abbildung 2: Kettenreaktion

des zweiten Rades das dritte $g(x) = 1.5x$ volle Umdrehungen ausführt. Bei x Umdrehungen des ersten Rades führt das dritte durch die Kettenreaktion folglich

$$k(x) = g\left(f(x)\right) = 1.5 \cdot 2 \cdot x = 3x$$

volle Rotationen aus. Was können wir über die Ableitung von k sagen? Die Ableitung von k nach der Variablen x ist natürlich die Anzahl Rotationen, die das dritte Rad pro volle Drehung des ersten ausführt, also 3. Und weil $3 = 1.5 \cdot 2$ gilt, stimmt wenigstens in diesem Beispiel unsere Behauptung, wonach die Ableitung der Verkettung gleich dem Produkt der Ableitung der äusseren mit der Ableitung der inneren Funktion ist. Die Kettenregel erscheint somit zumindest als eine plausible Ableitungsregel. Aber natürlich erlangen wir volle Sicherheit erst durch den und nach dem Beweis.

Sei f eine an der Stelle x differenzierbare Funktion. Wir wissen, dass $f'(x)$ die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $(x, f(x))$ misst.



Der Term $f'(x) \cdot \Delta x$ ist eine Approximation des realen Zuwachses Δf. Wir machen aber einen kleinen Fehler, wenn wir $f'(x) \cdot \Delta x$ anstelle von Δf verwenden. Wie gross ist dieser Approximationsfehler? Nun, offenbar gilt

$$\begin{aligned} \text{Fehler} &= \Delta f - f'(x) \cdot \Delta x \\ &= (f(x+\Delta x) - f(x)) - f'(x) \cdot \Delta x \\ &= \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right) \cdot \Delta x \\ &= \varepsilon \cdot \Delta x \end{aligned}$$

wobei

$$\varepsilon := \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x).$$

Weiter strebt natürlich ε gegen 0, wenn $\Delta x \to 0$, weil der Differenzenquotient in der Klammer dann zur ersten Ableitung konvergiert.

MERKE:

Es gilt

$$\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x = \big(f'(x) + \varepsilon\big) \cdot \Delta x$$

und $\varepsilon \to 0$ falls $\Delta x \to 0$.

Damit sind wir gerüstet für den eigentlichen Beweis der Kettenregel:

Beweis Kettenregel. Da f an der Stelle x differenzierbar ist, gilt nach obiger Vorbemerkung:

$$\Delta f = \big(f'(x) + \varepsilon_1\big) \cdot \Delta x \qquad (\star)$$

wobei $\varepsilon_1 \to 0$, wenn $\Delta x \to 0$. Da g an der Stelle y differenzierbar ist, gilt ebenfalls nach obiger Vorbemerkung:

$$\Delta g = \big(g'(y) + \varepsilon_2\big) \cdot \Delta f, \qquad (\star\star)$$

wobei $\varepsilon_2 \to 0$, wenn $\Delta f \to 0$ und (wegen der Stetigkeit) $\Delta f \to 0$, wenn $\Delta x \to 0$.

Wenn wir die Gleichungen $(\star)$ und $(\star\star)$ kombinieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta g &= \big(g'(y) + \varepsilon_2\big) \cdot \Delta f \\ &= \big(g'(y) + \varepsilon_2\big) \big(f'(x) + \varepsilon_1\big) \cdot \Delta x \\ &= \big(g'(f(x)) + \varepsilon_2\big) \big(f'(x) + \varepsilon_1\big) \cdot \Delta x \\ &= \Big[g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) + g'\left(f(x)\right) \cdot \varepsilon_1 \\ &\qquad + \varepsilon_2 \cdot f'(x) + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2\Big] \cdot \Delta x \end{aligned} \qquad (\heartsuit)$$

Nun betrachten wir die gesuchte Ableitung der Funktion k:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g\left(f(x)\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Setzen wir für Δg den in $(\heartsuit)$ gefundenen Term ein, so kürzt sich Δx weg, und von den vier Summanden streben drei gegen 0 (wenn $\Delta x \to 0$). Am Ende bleibt gerade die gewünschte Erkenntnis übrig:

$$k'(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x).$$

$\square$

Wir haben weiter oben bewiesen, dass die Exponentialfunktion zur Basis e und ihre Ableitung identische Funktionen sind. Damit bleibt aber ungeklärt, wie sich eine Exponentialfunktion beim Ableiten verhält, deren Basis nicht gleich e ist. Immerhin machten unsere Untersuchungen solcher Funktionen zu den Basen $2, 2.5, 3$ und 3.5 klar, dass die Funktion sich beim Ableiten ändert; wir wissen allerdings noch nicht, welcher Art diese Änderung genau sein wird. Dank der Kettenregel lässt sich dieses Geheimnis schnell lüften. Wir benutzen einen einfachen formalen Trick, um die Frage nach der Ableitung einer Exponentialfunktion zu einer beliebigen Basis zurückzuführen auf die Ableitung der Exponentialfunktion zur Basis e.

Ist nämlich a eine beliebige positive reelle Basis $\neq 1$, so gilt nach Definition des Logarithmus:

$$a = \mathrm{e}^{\ln(a)}.$$

Folglich ist

$$a^x = \mathrm{e}^{\ln(a)^x} = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}.$$

Das ist eine zusammengesetzte Funktion mit der inneren Funktion $f(x) = \ln(a) \cdot x$ und der äusseren Funktion $g(x) = \mathrm{e}^x$, und deshalb ist sie der Kettenregel zugänglich:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}\right)\\ &= \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}\cdot \ln(a)\\ &= \mathrm{e}^{\ln(a)^x}\cdot \ln(a)\\ &= a^x \cdot \ln(a).\end{aligned}$$

Beim Ableiten der Exponentialfunktion mit Basis a entsteht also abermals dieselbe Funktion, diesmal allerdings versehen mit dem konstanten Faktor $\ln(a)$. Dieser Faktor wird 1 für $a = e$, wie es sein soll. Ist $a < e$, so ist $\ln(a) < 1$, und deshalb muss der Graph der Ableitung unterhalb des Graphen der Funktion verlaufen. Ist aber $a > e$, so ist $\ln(a) > 1$, und deshalb muss der Graph der Ableitung oberhalb des Graphen der Funktion verlaufen. Und das entspricht ja ganz und gar unseren bisherigen Beobachtungen. Merken wir uns daher:

> **Satz:** (Ableitung der Exponentialfunktion)
> *Für $a > 0$ und $a \neq 1$ ist die Funktion $y = a^x$ differenzierbar, und es gilt:*
>
> $$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x.$$

Produkte und Quotienten

Wir wissen noch immer nicht, welche Wirkung die Operation des Ableitens bei einem Produkt oder Quotienten entfaltet; dieser dringlichen Frage wollen wir uns nun als erstes stellen. Danach widmen wir uns all denjenigen Elementarfunktionen, deren Differentiation wir bisher noch nicht beherrschen.

Noch einmal: Soll ein Produkt zweier Funktionen abgeleitet werden, so gelingt dies nicht einfach dadurch, dass man die Faktoren einzeln ableitet und dann die beiden Ableitungen multipliziert. So verführerisch diese Idee auch sein mag, so falsch ist sie auch, und praktisch jedes konkrete Beispiel würde sie falsifizieren. Wir stellen sogleich den Differentialquotienten auf und untersuchen, wie er sich umformen lässt:

Sei also $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ein Produkt zweier differenzierbarer Funktionen. Gemäss Definition der Ableitung ist

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1)\cdot g(x_1) - f(x)\cdot g(x)}{x_1 - x}.$$

Das Problem ist, dass in diesem Term die beiden Funktionen f und g wie zwei verhedderte

Schnüre so ineinander verwickelt sind, dass nicht klar ist, wie sie getrennt werden können. Es fällt auf, dass in dem Term „irgendwie“ die Ableitung von f enthalten ist (wenn die g-Ausdrücke nicht stören würden) und dass auch „irgendwie“ die Ableitung von g enthalten ist (wenn die f-Ausdrücke nicht stören würden). Unser Ziel muss es folglich sein, die Schlingen so aufzulösen, dass die Ableitungen von f und g einzeln greifbar werden. Einen Knoten löst man oft so auf, dass man an den einzelnen Windungen zupft und den Knoten vergrössert, bis klar wird, wie die Schnüre sich trennen lassen. Genau das machen wir mit unserem Term. Wir vergrössern ihn, in dem wir einfügen, was wir zur Trennung benötigen, ohne freilich den Wert zu verändern.

Schön wäre, man könnte im Zähler den folgenden eingerahmten Term einfügen:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1)\cdot g(x_1) \boxed{-f(x)\cdot g(x_1)} - f(x)\cdot g(x)}{x_1 - x}.$$

Dann könnte man nämlich in den beiden ersten Summanden des Zählers $g(x_1)$ ausklammern und hätte gerade den Differenzenquotienten von f übrig, welcher nach dem Grenzwertprozess zur Ableitung von f führt. Aber wir müssen auf der Hut sein. Jeder eingefügte Term würde den Wert des Differentialquotienten verändern, ausser natürlich, er wäre gleich 0, was beim obigen Versuch nicht zutrifft. Wenn wir den „Knoten“ also vergrössern, so muss das so geschehen, dass er seinen Wert nicht verändert. Daher fügen wir künstlich eine komplizierte Null ein, indem wir den gewünschten Summanden subtrahieren und gleich wieder addieren:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1)\cdot g(x_1) + \boxed{\ldots} - f(x)\cdot g(x)}{x_1 - x}$$

wobei $\ldots = -f(x)\cdot g(x_1) + f(x)\cdot g(x_1)$.

Nun lässt sich der Knoten auflösen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} &= \lim_{x_1 \to x} \frac{1}{x_1 - x} \cdot \Big(f(x_1)\cdot g(x_1) \\ &\qquad - f(x)\cdot g(x_1) + f(x)\cdot g(x_1) - f(x)\cdot g(x) \Big) \\ &= \lim_{x_1 \to x} \Big(\frac{f(x_1)\cdot g(x_1) - f(x)\cdot g(x_1)}{x_1 - x} \\ &\qquad + \frac{f(x)\cdot g(x_1) - f(x)\cdot g(x)}{x_1 - x} \Big) \\ &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \cdot g(x_1) \\ &\qquad + \lim_{x_1 \to x} f(x) \cdot \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \\ &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).\end{aligned}$$

Damit ist klar, wie Produkte abzuleiten sind, und wir merken uns:

Satz: (Produktregel)
Sei $h(x) = f(x)\cdot g(x)$. Sind f und g beide differenzierbar an der Stelle x, so ist auch h differenzierbar an der Stelle x, und es gilt:

$$h'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Für Quotienten ist nur ein kleiner Zusatzaufwand nötig, weil jeder Quotient als Produkt darstellbar und die Frage nach der Ableitung eines Quotienten somit auf die eben beantwortete Frage nach der Ableitung eines Produktes zurückführbar ist. Ist nämlich

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

mit differenzierbaren Funktionen f und g (und natürlich $g(x) \neq 0$), so kann der Quotient leicht umgeschrieben werden zu einem Produkt:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot (g(x))^{-1}.$$

Nun wenden wir die „frisch gebackene“ Produktregel an, dürfen aber nicht übersehen, dass der zweite Faktor den Einsatz der Kettenregel nötig macht.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) \cdot (g(x))^{-1}\right) \\ &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} \\ &\qquad + f(x) \cdot (-1) \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

Merken wir uns also:

Satz: (Quotientenregel)
Sei $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Sind f und g differenzierbar an der Stelle x und ist überdies $g(x) \neq 0$, so ist auch h differenzierbar an der Stelle x, und es gilt:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Betrachten wir zwei Beispiele:

Die Funktion $y = \mathrm{e}^{-x} \cdot \cos(x)$ lässt sich nun leicht mit Hilfe der Produktregel (und natürlich weiteren Regeln) ableiten. Wir sollten nicht übersehen, dass der erste Faktor eine verkettete Funktion ist, bei deren Ableitung die Kettenregel nötig wird. Laut Produktregel ergibt sich folgende Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \cdot \cos(x) + \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(x)) \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) \cdot \cos(x) + \mathrm{e}^{-x} \cdot (-\sin(x)) \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \cdot \cos(x) - \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(x) \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \cdot (\sin(x) + \cos(x)).\end{aligned}$$

Auch die Funktion $y = \tan(x)$ macht uns nun keine Mühe mehr. Laut Quotientenregel ist nämlich

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan(x)) \\ &\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \\ &\quad = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &\quad = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &\quad = \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Weise lässt sich auch die Ableitung von Cotangens bestimmen.

Satz: (Ableitung von Tangens und Cotangens)

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}, \\ \cot'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(x)}.\end{aligned}$$

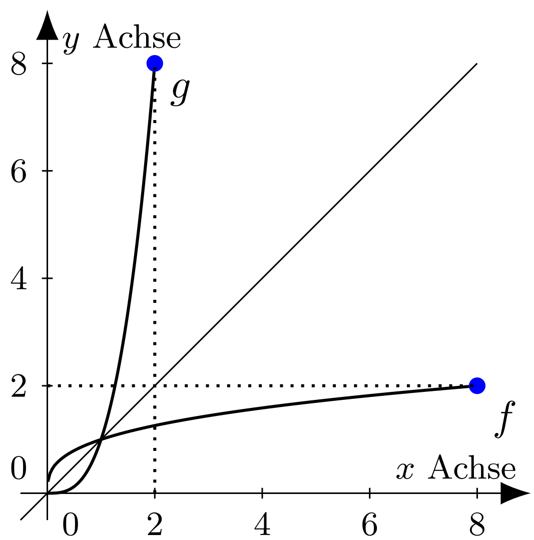
Der magische Spiegel

Wäre es nicht überaus reizvoll, wenn man bei gewissen Fragen, die man selber nicht beantworten kann, einfach sein Spiegelbild befragen könnte? Freilich ist dazu ein magischer Spiegel nötig, in dem das Spiegelbild Dinge weiss, die das Original nicht weiss. In der Mathematik ist so etwas möglich. Betrachten wir dazu etwa die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ über dem Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$. Wir möchten die Ableitung an der Stelle $x = 8$ erfahren. Leider helfen uns alle bisher erarbeiteten Differentiationsregeln nicht weiter, da keine für den Fall einer Wurzelfunktion dabei ist. Was tun?

Glücklicherweise ist unsere Funktion bijektiv; sie besitzt also eine Umkehrfunktion $g := f^{-1}$, und es ist

$$g(x) = f^{-1}(x) = x^3.$$

Betrachten wir einmal die Graphen unserer Funktion und ihrer Umkehrfunktion:



Die Umkehrfunktion ist in einem bestimmten Sinn das Spiegelbild der Funktion selbst, denn die beiden Graphen sind bekanntlich achsensymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten. Diese Symmetrieeigenschaft bringt es mit sich, dass wir die Umkehrfunktion befragen können, um die Antwort auf unsere Frage zu erhalten. Da der Punkt $(8, 2)$ auf dem Graphen der Funktion liegt, liegt der Punkt $(2, 8)$ auf dem Graphen der Umkehrfunktion, und die Steigungen der beiden Tangenten sind reziprok zueinander. Wollen wir also die Steigung des Wurzelgraphen an der Stelle 8 in Erfahrung bringen, so gehen wir einfach zum „Spiegelbild“, dessen Ableitung wir leicht bestimmen können, holen uns von dort die Ableitung an der Stelle 2 und bilden den reziproken Wert.

Wegen $g'(x) = 3x^2$ ist $g'(2) = 12$, und folglich ist die Antwort auf die eingangs gestellte Frage $1/12$.

Das hier geschilderte Prinzip ist überaus nützlich, lässt sich damit doch die Ableitung einer Funktion, die wir noch nicht beherrschen, einfach dadurch finden, dass wir uns im „magischen Spiegel“ die Ableitung der Umkehrfunktion beschaffen, vorausgesetzt natürlich, dass wir diese bereits beherrschen. Auf diese Weise finden wir leicht folgendes:

> Die Ableitungen aller Wurzelfunktionen, weil wir diejenigen der Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten bereits kennen,
>
> Die Ableitungen aller Logarithmusfunktionen, weil wir diejenigen der Exponentialfunktionen bereits kennen,
>
> Die Ableitungen der Arcusfunktionen, weil wir diejenigen der trigonometrischen bereits kennen.

Beginnen wir also damit, dieses Prinzip gewinnbringend umzusetzen.

Satz: (Umkehrregel)
Sei f eine in einem Intervall I umkehrbare und differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ an der Stelle $x \in I$. Dann ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $f(x)$ auch differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{g'\left(f(x)\right)}.$$

In unserem einleitenden Beispiel war $x = 8$ und $f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$. Um $f'(8)$ in Erfahrung zu bringen, befragen wir einfach die Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x) = x^3$ mit $g'(x) = 3x^2$ und finden

$$f'(8) = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12}.$$

Beweis Umkehrregel. Der Beweis dieser Regel ist verblüffend einfach: Aufgrund der charakteristischen Eigenschaft einer Umkehrfunktion wissen wir, dass

$$g\left(f(x)\right) = x$$

ist für alle x aus der Definitionsmenge von f. Bilden wir (unter Verwendung der Kettenregel) beidseitig die Ableitung, so erhalten wir

$$g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) = 1.$$

Eine triviale Umformung führt schliesslich auf die behauptete Gleichung

$$f'(x) = \frac{1}{g'\left(f(x)\right)}.$$

□

Mit diesem starken Werkzeug meistern wir nun die Ableitungen aller noch fehlender Funktionen. Beginnen wir mit den Wurzelfunktionen:

Satz: (Ableitung der Wurzelfunktionen (allgemeinen Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten))
Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Die Funktionen $y = x^{1/n}$ und $y = x^{m/n}$ sind differenzierbar, und es gilt:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$
$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Das früher schon beobachtete Prinzip des Ableitens einer Potenzfunktion ist offenbar nicht nur bei ganzzahligen Exponenten $\neq 0$ korrekt, sondern auch bei rationalen und sogar, wie sich nachweisen lässt, bei reellen.

$$x^k \quad \xrightarrow{\text{Ableitungsprozess}} \quad k \cdot x^{k-1}.$$

Beweis Ableitung Wurzelfunktion. Wir beweisen hier nur die erste Gleichung und überlassen die zweite den Leserinnen und Lesern als leichte Übung. Sei also $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$. Die Funktion ist bijektiv und besitzt (über $\mathbb{R}_0^+$) die Inverse $g(x) = x^n$. Nach der Umkehrregel ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{g'\left(f(x)\right)} \\ &= \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n \cdot x^{1-\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

□

So einfach ist das. Anstatt die Ableitung der Wurzelfunktion direkt zu bestimmen, wählen wir den scheinbaren Umweg über die Inverse, deren Ableitung wir schon kennen, und gelangen mit zwei Umformungen bereits ans Ziel.

Auf ähnlich einfache und elegante Weise gelingt nun auch die Bestimmung der Ableitung einer Logarithmusfunktion. Es gilt:

Satz: (Ableitung der Log-funktionen)
Die Funktionen $y = \ln(x)$ und $y = \log_B(x)$ (für eine positive reelle Basis $B \neq 1$) sind differenzierbar, und es gilt:

$$
\begin{aligned}
y &= \ln(x) \to y'(x) = \frac{1}{x} && (x > 0),\\
y &= \log_B(x) \to y' = \frac{1}{\ln(B)}\frac{1}{x} && (x > 0).
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir beweisen hier nur die erste Gleichung und überlassen die zweite den Leserinnen und Lesern als leichte Übung.

Sei also $f(x) = \ln(x)$ mit $x > 0$. Die Funktion ist bijektiv und besitzt die Inverse $g(x) = \mathrm{e}^x$. Nach der Umkehrregel gilt

$$f'(x) = \frac{1}{g'\left(f(x)\right)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

□

Erneut erweist sich der scheinbare Umweg über die Umkehrfunktion als Glücksfall; der Beweis könnte kürzer kaum sein. Wir wenden dieses Prinzip ein drittes Mal an:

Satz: (Ableitung der Arkusfunktionen)
Die Arkusfunktionen sind differenzierbar, und es gilt:

$$
\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && |x| < 1,\\
\arccos'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && |x| < 1,\\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Beweis. Wiederum beweisen wir hier nur die erste Gleichung.

Sei also $f(x) = y = \arcsin(x)$ mit $|x| < 1$. Die Funktion ist bijektiv und besitzt die Inverse $g(x) = \sin(x)$ mit $|x| < \frac{\pi}{2}$. Nach der Umkehrregel gilt:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)}.$$

Alle Werte von y liegen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, wo Cosinus positiv ist. Wir können $\cos(y)$ folglich ersetzen durch $\sqrt{1-\sin^2(y)}$. Daher ist

$$
\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\cos(y)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin(x)\right)}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}
$$

□

Wir haben wirklich Grund zum Feiern. Es ist uns gelungen, von allen für die Mathematik und ihre Anwendungen so grundlegenden Funktionstypen die Ableitung zu finden. Damit allein sind noch keine realen Probleme gelöst, aber es ist eine wertvolle Basis dafür geschaffen. Die ganz zu Beginn vorgestellte Frage ist in einem eingeschränkten Sinne beantwortet: Wir wissen, dass die Geschwindigkeit die erste Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit ist, und wir wissen nun, dass wir zur Bestimmung dieser Ableitung in der Lage sind, gesetzt der Fall, dass wir überhaupt über die Ort-Zeit-Funktion verfügen.

Als willkommenen Nebeneffekt besitzen wir nun auch Kompetenzen in Bezug auf die Bestimmung des Krümmungsverhaltens und der Lage von ausgezeichneten Punkten von Kurven. Und wir haben erste Kenntnisse zur Lösung von Extremwertaufgaben gewonnen.

Das ist alles sehr erfreulich, und doch müssen wir uns der Tatsache bewusst sein, dass die Reise nicht zu Ende ist und – genau genommen – gar nie zu Ende sein kann. Noch bleibt viel zu tun: Die Differentialrechnung hat im Laufe der Jahrhunderte seit ihrer Entwicklung zahlreiche Anwendungen und Erweiterungen gefunden, deren Studium sich unbedingt lohnt. Wie löst man anspruchsvollere Extremwertprobleme, und welche Schwierigkeiten sind dabei zu erwarten? Wie kann Differentialrechnung auch beim Lösen schwieriger Gleichungen helfen? Kann Differentialrechnung so ausgebaut werden, dass sie auch bei Funktionen in mehr als einer Variablen einsatzfähig wird – und gegebenenfalls wie? Bei komplexen technischen und naturwissenschaftlichen Fragestellungen ist häufig eine Funktion gesucht, und die Nebenbedingungen erlauben das Aufstellen einer sogenannten Differentialgleichung. Worum genau handelt es sich hierbei? Grund genug, sich weiterhin dieser interessanten, vielseitigen und wertvollen Disziplin zu widmen.