Differentiationsregeln I

[Differentialrechnung]

Armin P. Barth

Bildquellenverzeichnis

1 Armin P. Barth

Zielsetzung

Was ist Geschwindigkeit, und wie können wir mit ihr rechnerisch umgehen? Wir haben verstanden, wie essentiell für die Modellierung vieler mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Vorgänge es ist, dass Ort-Zeit-Funktionen bewegter Objekte sowie Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktionen graphisch und formal erfasst werden können. Wir haben verstanden, welcher Zusammenhang besteht zwischen den genannten physikalischen Grössen und der Steigung von Tangenten an Kurven. Die Differentialrechnung ist die Disziplin, die gerade diese mathematische Kernaufgabe erfolgreich löst, indem sie zu einer gegebenen (differenzierbaren) Funktion die Tangentensteigung an einer beliebigen Stelle zu ermitteln gestattet. Und damit löst sie eben auch die vielen möglichen Anwendungsaufgaben, deren abstraktes Analogon im Tangentenproblem besteht.

Wir können aber noch nicht von einem durchschlagenden Erfolg sprechen. Wir können die Ableitung grob richtig skizzieren, wir können sie in einfachen Fällen berechnen, und wir können (mit Hilfe eines Taschenrechners oder geeigneter Software) einfache Extremwertaufgaben in einer Variablen lösen. Die Welt ist aber nicht immer einfach. Wir sind noch nicht in der Lage, die Ableitung schnell und mühelos zu berechnen, wenn die vorliegende Funktionen komplizierter ist, noch nicht in der Lage, beispielsweise aus dem bekannten Beschleunigungsverhalten eines Objektes auf dessen Geschwindigkeit oder aus dem bekannten Geschwindigkeitsverhalten auf das Ort-Zeit-Verhalten zu schliessen, usw. Insofern hat die Einstiegsfrage also erst eine Teilantwort erfahren.

Der erstgenannten Herausforderung wollen wir uns jetzt stellen. Konkret geht es um die Frage, wie die häufigsten Funktionen differenziert werden können. Das ist eine sehr mathematische Frage, denn es spielt dabei ja keine Rolle, welche konkreten Anwendungen die Funktionen modellieren. Bei einfachen Polynomfunktionen und einigen rationalen Funktionen ist uns die Berechnung der Ableitung schon geglückt, teilweise aber auch missglückt. Ziel muss es darum sein, dass wir uns der Reihe nach alle wichtigen Funktionstypen vorknöpfen und jeweils einen leicht gangbaren Weg finden, die Ableitung rechnerisch zu bestimmen. Die gute Nachricht ist, dass am Ende Ableitungsregeln (Differentiationsregeln) vorliegen werden, die den rechnerischen Umgang mit Ableitungen enorm erleichtern.

Das Werk „Nova methodus. . . “ von Leibniz aus dem Jahr 1684 enthielt die meisten dieser Ableitungsregeln bereits, allerdings noch ohne Beweis. Und hier war auch das erste Mal von Differentialrechnung die Rede. In der hier vorgestellten Form gehen die Regeln unter anderem auf den grossen Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) zurück.

Oft versagt die erste Idee

Zunächst sollten wir uns bewusst werden, dass wir vor einer Hürde stehen und welcher Art sie ist; das kann helfen, ein schmerzliches Straucheln zu verhindern. Die Hürde ist aus unserem aktuellen Unvermögen aufgebaut, etwa die Funktionen $x^n, \sin(x), \cos(x), \tan(x), \ln(x), \sqrt[n]{x}$ usw. formal abzuleiten. Weiter an Höhe gewinnt die Hürde dadurch, dass wir noch nicht wissen, wie sich die Ableitung einer Funktion, die durch eine der vier Grundoperationen aus zwei Teilfunktionen zusammengesetzt ist, aus den Ableitungen der Teilfunktionen aufbauen lässt. Deutlicher:

Wenn $f(x) = g(x) + h(x)$, ist es dann wahr oder falsch, dass $f'(x) = g'(x) + h'(x)$? Kann man also etwa die Funktion $x^2 + 3x$ einfach dadurch ableiten, dass man x^2 und $3x$ einzeln ableitet und die beiden Ableitungen dann addiert? Unnötig zu sagen, dass das wünschenswert wäre.

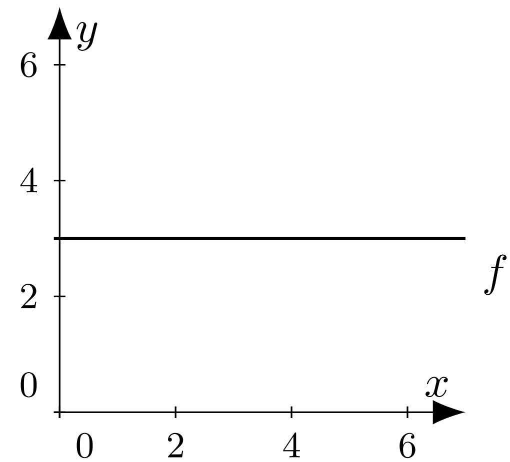
Oder: Wenn $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, ist es dann wahr oder falsch, dass $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$? Kann man also etwa die Ableitung der Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$ einfach dadurch gewinnen, dass man beide Faktoren einzeln ableitet und die Ergebnisse wieder multiplikativ verknüpft?

Und wie ist das bei Subtraktion und Division?

Beim vertieften Nachdenken wird die Hürde leider immer diffuser. Wie soll man eine Ableitung anpacken, wenn es sich um eine zusammengesetzte Funktion wie $\sin(x^2)$ oder $(2x-5)^3$ oder $3^{0.5x-4}$ handelt? Tatsächlich wäre es eine schlechte Idee, allein der ersten Intuition zu vertrauen. Oft versagt die erste Idee nämlich, und es lohnt sich, genauer hinzuschauen.

Konstante Funktionen

Der einfachste Funktionentyp ist zweifellos die konstante Funktion. Funktionen wie $f(x) = 5$ oder $g(x) = 0$ oder $h(x) = \pi$ usw. sind alles andere als spannend, und auch die Berechnung der Ableitung erweist sich als überaus einfach. Trotz der Einfachheit sollten wir uns aber bemühen, das „Problem“ von mindestens zwei Seiten her zu beleuchten. Der Graph einer konstanten Funktion ist eine zur x-Achse parallele Gerade in der Höhe 5 oder 0 oder π oder irgendeiner anderen Höhe. Die Ableitung ist diejenige Funktion, die jeder zulässigen Stelle (in diesem Fall jeder reellen Zahl) die Steigung der Tangente an den Graphen an dieser Stelle zuordnet. Die Tangente an eine zur x-Achse parallele Gerade hat aber an jeder Stelle Steigung 0. Daher gilt für jede konstante Funktion $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$), dass $f'(x) = 0$ ist. Überraschend ist das sicherlich nicht.



Natürlich – und dies ist die zweite Seite – muss der Formalismus auf dasselbe Resultat führen. Wenn wir also für $f(x) = a$ den Differentialquotienten ansetzen, so muss dieser zwingend 0 liefern:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{a - a}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{x_1 \to x_0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine erste, wenn auch noch nicht besonders begeisternde Ableitungsregel geschafft:

Satz: (Ableitung einer konstanten Funktion)
Für $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) gilt: $f'(x) = 0$.

Summe und Differenz

Angenommen, Sie erfahren zuverlässig, dass die Funktion $f(x) = x^2$ die Ableitung $f'(x) = 2x$ und dass die Funktion $g(x) = \sin(x)$ die Ableitung $g'(x) = \cos(x)$ hat, und weiter angenommen, Sie müssten nun die Ableitung der Funktion $h(x) = x^2 + \sin(x)$ bilden, würden Sie dann zögern, $h'(x) = 2x + \cos(x)$ hinzuschreiben? Wohl kaum. Es ist so verführerisch, das zu tun, dass es uns schwer fallen würde, es uns abzugewöhnen, wenn es falsch wäre.

Es ist glücklicherweise nicht falsch. Es gilt nämlich die folgende Ableitungsregel:

Satz: (Ableitung einer Summe oder Differenz)
Ist $h(x) = f(x) \pm g(x)$ und sind f und g differenzierbar an der Stelle x, so ist auch h differenzierbar an der Stelle x, und es gilt: $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Wir machen uns an den Beweis und bemühen uns dann, die Regel vertieft zu verstehen:

Beweis. Um die "+-Version" zu beweisen, betrachten wir eine Funktion der Art $h(x) = f(x) + g(x)$. Wir benutzen die Definition der 1. Ableitung, um schliessen zu können, dass:

$$h'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{[f(x_1) + g(x_1)] - [f(x) + g(x)]}{x_1 - x}.$$

Der zweite Schritt besteht darin, die Klammern aufzubrechen und die Terme neu zu gruppieren:

$$h'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x) + g(x_1) - g(x)}{x_1 - x}.$$

Jetzt spalten wir einfach den Bruch in zwei Brüche auf:

$$h'(x) = \lim_{x_1 \to x} \left(\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} + \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \right).$$

und benutzen eine Grenzwertregel:

$$h'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} + \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x}.$$

Schliesslich, nach Definition der 1. Ableitung, erhalten wir das gewünschte Resultat:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

□

Diese Eigenschaft nennt man auch die *Additivität* der Ableitung. Für die „Minus-Version" muss man obigen Beweis nur leicht abändern, aber das überlassen wir den Leserinnen und Lesern als einfache Übung.

Wie kann man auch ohne Formalismen einsehen, dass diese Regel gelten muss? Die Regel ist überaus plausibel, wenn man die 1. Ableitung als momentane Änderungsrate (also als ein Mass für die Änderung des Funktionswertes an einer bestimmten Stelle) auffasst. Stellen wir uns nur einmal vor, die Funktionen $m(t)$, $f(t)$ und $p(t)$ seien die Anzahl Männer bzw. Frauen bzw. Personen auf der Welt zum Zeitpunkt t. Natürlich ist $p(t) = m(t) + f(t)$ – etwas konservativ gedacht. Und was ist $p'(t)$? Das ist die momentane Änderungsrate der Anzahl Personen weltweit, also die momentane Steigung dieser Funktion. Wie hängt diese mit den Änderungsraten der beiden Teilfunktionen zusammen? Natürlich ist $p'(t) = m'(t) + f'(t)$, weil sich die gesamte Änderungsrate einfach dadurch ergibt, dass man die Änderungsraten der Männer und der Frauen addiert. Es kann also keine Überraschung sein, dass die Regel zutrifft.

Konstante Faktoren

Angenommen, wir sind nun mit der Funktion $f(x) = 5 \cdot \sin(x)$ konfrontiert und wir wissen zuverlässig, dass $\sin'(x) = \cos(x)$ gilt. Ist es dann nicht verführerisch zu denken, dass $f'(x) = 5 \cdot \cos(x)$ sein muss? Dass wir den konstanten Faktor 5 unverändert belassen können? Doch nur, weil das naheliegend erscheint, braucht es nicht korrekt zu sein. Was würde es genau bedeuten, so vorzugehen? $\sin'(x)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Sinusfunktion an einer Stelle x. Das hier beschriebene Vorgehen würde also bedeuten zu glauben, dass die Steigung sich verfünffacht, wenn man von $\sin(x)$ zu $5 \cdot \sin(x)$ übergeht. Ist das richtig? Ist es klar?

Betrachten wir einmal das folgende Bild, in dem eine wachsende Blume mittels einer Lampe gegen eine Wand projiziert und damit auf die fünffache Höhe vergrössert wird. Sei $h(t)$ die Funktion, die jedem Zeitpunkt die aktuelle Höhe der Blume zuweist. Die originale Blume wächst also gemäss $h(t)$, und die Projektion wächst gemäss der Funktion $5 \cdot h(t)$. Wenn wir nun die zweite Funktion ableiten, also $(5 \cdot h(t))'$ untersuchen, so fragen wir nach der momentanen Wachstumsrate der Projektion. Natürlich ist diese 5mal so gross wie die momentane Wachstumsrate der Blume selbst, weil der Schatten fünfmal so schnell wächst wie die Blume. Würde die Blume in der nächsten Sekunde um 1 Millimeter wachsen, so müsste der Schatten im gleichen Zeitraum ja um 5 Millimeter wachsen – ganz abgesehen davon, dass keine Blume dieser Welt ein solches Turbowachstum hinlegen kann. Folglich gilt: $(5 \cdot h(t))' = 5 \cdot h'(t)$.

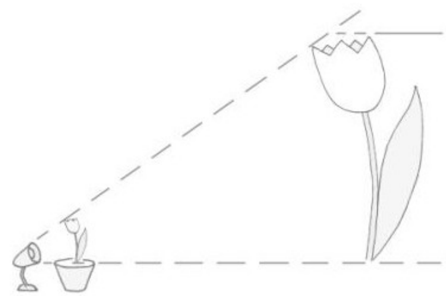


Abbildung 1: Projektion

Somit ist auch die folgende Ableitungsregel sehr plausibel geworden:

Satz: (Faktorregel)
Ist $f(x) = c \cdot g(x)$ mit dem konstanten Faktor $c \in \mathbb{R}$ und ist g differenzierbar, so ist auch f differenzierbar, und es gilt: $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

Bewiesen ist die Regel damit aber noch nicht, und das holen wir nun nach:

Beweis. Nach Definition der Ableitung gilt zunächst

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \\ &= \lim_{x_1 \to x} \frac{c \cdot g(x_1) - c \cdot g(x)}{x_1 - x} \end{aligned}$$

Wir klammern die Konstante vor

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} c \cdot \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x}$$

und benutzen eine Grenzwertregel

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} c \cdot \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x}$$

Erneut die Ableitungsdefinition benutzend ergibt sich das gewünschte Resultat mühelos:

$$f'(x) = c \cdot g'(x).$$

□

Diese Eigenschaft heisst auch *Homogenität* der Ableitung. Zusammen mit der Additivität macht sie klar, dass Differenzieren eine *lineare Operation* ist, und das ist eine Tatsache, an die man sich überaus schnell und gern gewöhnt.

Potenzfunktionen

Wir dürfen uns noch lange nicht ausruhen, denn was wir bisher gewonnen haben, löst – genau genommen – nur ganz wenige Ableitungsprobleme. Sind wir etwa mit der Funktion $f(x) = x^7 + 3 \cdot 2^x - 3.4$ konfrontiert, so wissen wir nun erst, dass die Ableitung summandenweise ausgeführt werden kann und wie die multiplikative Konstante behandelt werden muss:

$$f'(x) = \left(x^7\right)' + 3 \cdot (2^x)' - 0.$$

Aber wir kennen die Ableitungen von x^7 und von 2^x noch nicht, und darum helfen die bisher erarbeiteten Regeln allein kaum weiter. Und genau darum sollten wir uns nun der wichtigsten Elementarfunktionen annehmen. Wir beginnen mit der Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten. Die Frage lautet also: Wie leitet man Funktionen der Art $y = x^4$ oder $y = x^{-2}$ ab? Oder allgemein: Was ist die erste Ableitung von $y = x^n$ mit ganzzahligem Exponenten n? Über die Ableitungen aller Funktionen aus dieser Familie wissen wir noch sehr wenig. Wir wissen natürlich, dass die Funktion $y = x = x^1$ die Ableitung 1 hat, weil es sich beim Graphen dieser Funktion um die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten handelt, die mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschliesst und damit an jeder Stelle Steigung 1 hat. Und wir haben bereits rechnerisch nachgewiesen, dass $y = x^2$ die Ableitung $2x$ hat. Abgesehen davon ist unser Wissen zu diesem Thema noch sehr gering.

Einer der vielen schönen Aspekte der Mathematik ist, dass man oftmals unendlich viele Probleme aufs Mal erledigen kann. Wir bestimmen einfach die Ableitung der Funktion $y = x^n$ und gewinnen auf einen Schlag die Ableitungen der Funktionen x^2, x^3, x^4 und unendlich vieler weiterer. Um uns vorerst nicht auch noch mit negativen Zahlen zu belasten, berechnen wir zuerst die Ableitung von $y = x^n$ für einen *natürlichen* Exponenten $n > 0$ und überlassen negative ganzzahlige Exponenten den Leserinnen und Lesern als gut machbare Übung. Es gilt die folgende Regel:

Satz: (Ableitung einer Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten)
Ist $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so gilt: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Insbesondere sind solche Funktionen stets differenzierbar.

Beweis. Sei also $y = x^n$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Definition der Ableitung liefert

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

Wir stehen vor einer verschlossenen Tür. Die Schwierigkeit besteht offenbar darin, mit einer Differenz zweier n-ter Potenzen umzugehen.

Und genau hierfür gibt es glücklicherweise einen Schlüssel, eine algebraische Hilfsformel nämlich, die diese Türe für uns aufstossen wird. Da Sie diese Formel vielleicht noch nie oder schon lange nicht mehr gesehen haben, lohnt sich eine ausführlichere Besprechung:

Die folgenden Identitäten lassen sich leicht verifizieren:

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= (a-b)\cdot(a+b) \\ a^3-b^3 &= (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) \\ a^4-b^4 &= (a-b)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \\ a^5-b^5 &= (a-b)\cdot(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) \\ &\dots \end{aligned}$$

Beim Ausmultiplizieren der rechten Seiten fällt nämlich auf, dass fast alle Summanden wegfallen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} &(a-b)\cdot(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) = \\ &\quad = a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4 \\ &\qquad -a^4b-a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5 \\ &\quad = a^5-b^5. \end{aligned}$$

Und analog können alle Identitäten überprüft werden. Wie lautet die verallgemeinerte Formel?

$$\begin{aligned} &(a^n-b^n) = \\ &\quad (a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots \\ &\qquad +a^1b^{n-2}+b^{n-1}). \end{aligned}$$

Wenn Sie möchten, können Sie diese Formel leicht mit vollständiger Induktion beweisen. Wir benutzen sie nun, um die verschlossene Türe zu öffnen. Dass sie das Schloss öffnet, ist offensichtlich; wir müssen ja nur a durch x_1 und b durch x ersetzen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{x_1\to x}\frac{(x_1-x)\cdot(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}\cdot x^1+\dots+x^{n-1})}{x_1-x}.$$

Offenbar kann x_1-x gekürzt werden, was eine wirklich gute Nachricht ist. Bedenken Sie: Erst nach Kürzen dieses Terms sind wir in der Lage, den Grenzwertprozess $x_1\to x$ durchzuführen! Also:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{x_1\to x}(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}\cdot x^1+x_1^{n-3}\cdot x^2+\dots+x^{n-1}).$$

Jetzt müssen wir den Grenzwertprozess durchführen, was wirklich einfach ist: Jeder einzelne Summand strebt zu x^{n-1}. Wir erhalten also:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^{n-1}+x^{n-1}+x_1^{n-1}+\dots+x^{n-1}).$$

Da diese Summe genau n Summanden enthält, gelangen wir zu unserem ersehnten Resultat:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = n\cdot x^{n-1}.$$

□

Damit sind wir nun in der Lage, jede nur denkbare Polynomfunktion mühelos abzuleiten. Betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$f(x) = 3\cdot x^7 - 2.5\cdot x^3 + \sqrt{2}\cdot x - 7.$$

Die Berechnung der Ableitung via Grenzwertberechnung beim Differenzenquotienten wäre ein mühevolles und fehleranfälliges Unterfangen. Wie viel angenehmer ist es doch, unsere eben erarbeiteten Ableitungsregeln einzusetzen: Wir dürfen die Ableitung summendenweise vornehmen, wir wissen, dass die (additive) Konstante 7 (oder -7) durch den Ableitungsprozess zu 0 wird, und wir wissen, wie die reellen Koeffizienten behandelt werden dürfen. Folglich:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= 3\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^7\right) - 2.5\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3\right) \\ &\quad + \sqrt{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^1\right) - 0. \end{aligned}$$

Wir haben ferner gelernt, wie natürliche Potenzen von x abzuleiten sind:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 3 \cdot 7 \cdot x^6 - 2.5 \cdot 3 \cdot x^2 + \sqrt{2} \cdot 1 - 0.$$

Etwas vereinfacht erhalten wir schliesslich:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 21x^6 - 7.5x^2 + \sqrt{2}.$$

Dieser Erfolg ist nicht zu unterschätzen. Wer mit Polynomfunktionen umgehen kann, hat ein überaus mächtiges Werkzeug in der Hand. Es gibt nämlich einen wunderschönen Satz von Karl Weierstrass, den *Approximationssatz*, der besagt, dass jede beliebige stetige Funktion beliebig exakt durch Polynomfunktionen angenähert werden kann. Um das vollends verständlich zu machen, muss man sich natürlich Gedanken dazu machen, wie der Fehler gemessen werden kann, den man macht, wenn man einen Graphen durch einen anderen approximiert. Wir begnügen uns hier mit dem vagen Hinweis, dass immer eine geeignete Polynomfunktion erzeugt werden kann, die sich an den Graphen einer gegebenen stetigen Funktion beliebig gut anschmiegt.

Der Mensch ist ein Gewohnheitstier. Man gewöhnt sich gerne an Muster und Abläufe, und es ist nur natürlich zu denken (oder zu hoffen), dass das Muster, nach dem eine Funktion $y = x^n$ mit natürlichem Exponenten n abzuleiten ist, noch immer Gültigkeit hat, wenn der Exponent nicht mehr natürlich ist, sondern vielleicht negativ ganzzahlig oder rational oder gar irrational:

$$x^k \quad \overset{\text{Ableitungsprozess}}{\longrightarrow} \quad k \cdot x^{k-1}.$$

Wir dürfen uns dieser Gewohnheit gerne hingeben. Tatsächlich gilt obige Regel auch für negative ganzzahlige Exponenten, und tatsächlich lässt sie sich für $x > 0$ auf rationale Exponenten und sogar auf beliebige reelle Exponenten ausweiten.

Sinus, Cosinus und Exponentialfunktion

Stellen wir uns vor, wir seien angestellt worden, um am Abend, wenn die Fabrik schliesst, alle Maschinen in der Fabrikhalle abzuschalten. Jede Maschine hat einen anderen Abschaltmechanismus, und es bleibt uns nichts anderes übrig, als jeden einzelnen zu erlernen. Erschwerend kommt hinzu, dass es sogar Kombimaschinen gibt, die sich nicht einfach dadurch abschalten lassen, dass man die einzelnen Maschinen abschaltet, sondern ein raffinierteres Vorgehen nötig machen.

Etwa so ergeht es uns im Moment in der Differentialrechnung. Wir können einzelne Funktionen ableiten, sind aber noch weit davon entfernt, den „Ableitungsmechanismus" aller Funktionen zu beherrschen. Und es warten auch noch die „Kombifunktionen" auf Klärung, nämlich die zusammengesetzten Funktionen. Ziel dieses Skriptes ist es, die Ableitung einiger weiterer Elementarfunktionen kennenzulernen, nämlich von

$$\sin(x), \cos(x), \exp(x).$$

Packen wir als erstes $y = \sin(x)$ an. Die Definition der Ableitung erzwingt diesen ersten Schritt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{\sin(x_1) - sin(x)}{x_1 - x}.$$

Wie so oft, kommen wir auch hier nicht weiter, wenn wir nicht etwas wissen. Wie kann die Differenz zweier Sinuswerte gewinnbringend umgeformt werden? Wir graben tief in der Trickkiste der Trigonometrie und finden dort eine Formel, die sich leicht aus den Additionstheoremen ergibt:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Wir wenden diese Formel an, indem wir α durch $x_1 = x + h$ und β durch x ersetzen, und wir gehen gleich zur h-Notation über, einerseits, um grösstmögliche Flexibilität zu bewahren, andererseits, weil $\alpha - \beta$ sich dann zu h vereinfacht:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).\end{aligned}$$

Der zweite Grenzwert ist offensichtlich gleich $\cos(x)$. Der erste Grenzwert ist in der Mathematik sehr bekannt; er wird oft im Rahmen von Grenzwertuntersuchungen hergeleitet, auf die wir folglich auch verweisen. Dort wird gezeigt, dass - und das liegt ja nicht unmittelbar auf der Hand - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ist. Da zweifellos auch die Hälfte von h gegen 0 tendiert, wenn h gegen 0 tendiert, erhalten wir somit das längst vermutete Resultat:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Die Ableitung der Cosinusfunktion erfolgt nach dem gleichen Muster; wir überlassen das den Leserinnen und Lesern als Übung und halten fest:

Satz: (Ableitung Sinus- / Cosinusfunktion) *Die Funktionen* sin *und* cos *sind überall differenzierbar, und es gilt mit x in Radiant:*

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \cos(x), \\ \cos'(x) &= -\sin(x).\end{aligned}$$

Diese Erkenntnis ist gar nicht so übel, vor allem dann nicht, wenn wir sie in einen grösseren Zusammenhang stellen: Die trigonometrischen Funktionen sind ja unter anderem darum so wichtig, weil sie einen rechnerischen Umgang mit Schwingungen erlauben. Schwingungsphänomene sind gerade in naturwissenschaftlichen und technischen Anwendungen überaus häufig anzutreffen. Angenommen, wir haben es mit einem gleichmässig schwingenden Objekt zu tun, dessen Bewegungsgleichung sich im Wesentlichen durch Sinus oder Cosinus ausdrücken lässt. Dann ermöglicht obige Erkenntnis immerhin eine präzise Aussage über das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhalten dieses Objektes. Und das kann ganz schön wertvoll sein.

Achtung: Wir haben ein wichtiges Detail verschwiegen! Falls Sie sich je darüber gewundert haben, dass in der Mathematik oft das Bogenmass (Radiantenmass) verwendet wird, während der Rest der Welt das gute alte Gradmass zu bevorzugen scheint, so kann jetzt ein wirklich überzeugender Grund angeführt werden: Die obige Regel stimmt nicht, wenn der Winkel im Gradmass gemessen wird! Und das liegt daran, dass in diesem Fall der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x},$$

den wir an entscheidender Stelle benötigen, nicht 1 ist (sondern $\pi/180$). Das würde aber nur klar, wenn man sich in die Details dieser Grenzwertberechnung hineinknien würde. Für uns ist wichtig festzuhalten, dass die so verführerisch elegante Regel, wonach die Ableitung der Sinusfunktion die Cosinusfunktion ist, immer einher geht mit der Forderung, dass x im Bogenmass zu messen ist.

Die Funktion $y = \mathrm{e}^x$ nimmt unter den Grundfunktionen eine herausragende Stellung ein. Je nachdem, wie diese Funktion früher an Sie herangetragen worden ist, kann das Folgende banal oder überaus verblüffend sein. Wir wählen hier die Vorgehensweise, dass wir zuerst die Ableitung bestimmen, dann staunen und dann erklären.

Die Definition der Ableitung ermöglicht diesen ersten Schritt, wobei wir gleich in der h-Notation arbeiten:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h}.$$

Wir wenden ein Potenzgesetz an und klammern im Zähler aus:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \cdot \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}.$$

Da der Term e^x nicht von h abhängt, dürfen wir ihn ruhig vor den Limes ziehen; der Grenzübergang $h \to 0$ wird auf ihn ja keinerlei verändernden Einfluss ausüben.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}.$$

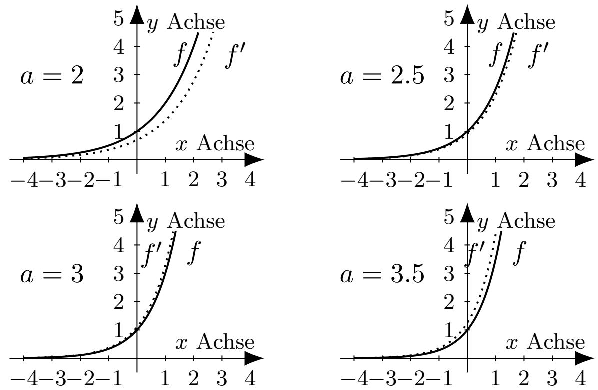
Der neu entstandene Grenzwert ist ebenso wie derjenige, dem wir bei Sinus begegnet sind, sehr bekannt in der Mathematik, und er wird üblicherweise im Rahmen von Grenzwertuntersuchungen thematisiert. Es gilt nämlich:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1.$$

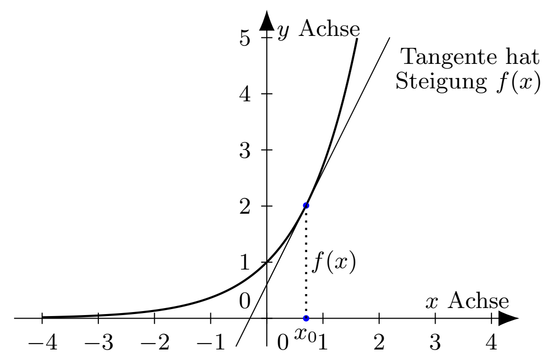
Damit haben wir die je nach Vorwissen überraschende oder bestätigende Antwort gefunden:

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x.$$

Spätestens jetzt wird klar, weshalb die Funktion $y = \mathrm{e}^x$ eine herausragende Rolle spielt: Die



Funktion ist ihre eigene Ableitung. Sie misst an jeder Stelle ihre eigene Steigung, genauer: Der Funktionswert an irgendeiner Stelle x entspricht immer der Steigung der Tangente an den Graphen an dieser Stelle. Unter allen Grundfunktionen hat nur diese Funktion diese exklusive Eigenschaft.



Diese Eigenschaft wird noch deutlicher, wenn wir uns folgende Frage stellen: Wenn wir Exponentialfunktionen der Art $f(x) = a^x$ betrachten für eine reelle Basis $a > 1$, wie verhalten sich dann die Graphen der Funktion und ihrer Ableitung zueinander? Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils dieses Graphenpaar für $a = 2, 2.5, 3$ und 3.5.

Es fällt sofort die grosse Ähnlichkeit beider Graphen auf. Mehr noch: Für $a = 2$ und $a = 2.5$

verläuft der Graph der Ableitung unterhalb dem Graphen der Ausgangsfunktion. Gäbe es eine glamouröse Wahl zur Funktion, die überall ihre eigene Steigung misst, so wären diese beiden Funktionen ganz ordentliche Kandidaten, aber eben nicht gut genug; sie messen nämlich etwas zu hoch, ihre Funktionswerte liegen überall oberhalb der Steigungswerte. Auch die Funktionen mit $a = 3$ und $a = 3.5$ sind vielversprechende Kandidaten, aber sie messen etwas zu tief, ihre Funktionswerte liegen überall tiefer als die Steigungswerte. Es ist plausibel, dass es irgendwo zwischen $a = 2.5$ und $a = 3$ eine Exponentialfunktion geben muss, die gekrönt werden wird, die alle anderen Kandidaten aussticht, weil sie an jeder Stelle exakt ihre eigene Steigung misst. Und die Wahl von $a = e = 2.718\ldots$ ist offenbar genau die richtige, wie der obige Beweis gezeigt hat. Merken wir uns also:

Satz: (Ableitung der Exponentialfunktion zur Basis e)
Die Funktion $y = \mathrm{e}^x$ *ist differenzierbar, und es gilt:* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.