Ableitungen skizzieren und berechnen

[Differentialrechnung]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

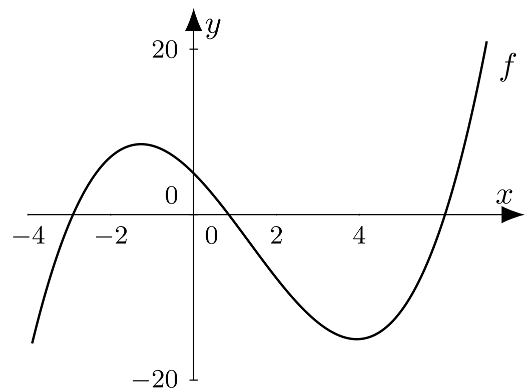
1 Armin P. Barth

Zielsetzung

Wo genau stehen wir nun? Mit dem übergeordneten Ziel vor Augen, die Frage nach Wesen, Formalisierbarkeit und Berechenbarkeit der Geschwindigkeit ganz allgemein zu beantworten, haben wir in der Ableitung einer Funktion ein hierfür bestens geeignetes Instrument entdeckt. Das mathematische Modell des Differenzenquotienten (Steigung der Sekante) und der Ableitung (Steigung der Tangente) ist genau das, womit sich die zahlreichen naturwissenschaftlichen Fragestellungen, die unter dem Stichwort Geschwindigkeitsproblem subsummiert werden können, erfassen lassen. Wir können mit diesem Instrument aber noch nicht besonders gut umgehen. Es ist, als hielten wir ein glänzendes, neues Werkzeug in der Hand und wüssten noch nicht so recht, welche Art von Handwerk sich damit besonders erleichtern lässt und wie. Das soll sich nun schrittweise ändern. In diesem Text lernen wir erstens, wie zu einer gegebenen Funktion die erste Ableitung qualitativ richtig skizziert werden kann und zweitens, wie die erste Ableitung rechnerisch bestimmt werden kann. Das erste verhilft uns zu einem besseren graphischen Verständnis der Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung, und das zweite stösst die Tür auf zu einem grossen, bisher gänzlich unerforschten Raum: dem rechnerischen Umgang mit Ableitungen. Es wird sich nämlich zeigen, dass das nicht ganz einfach ist und dass hier noch viel Arbeit und vor allem viele gute Ideen auf uns warten. . .

Eine Ableitung skizzieren

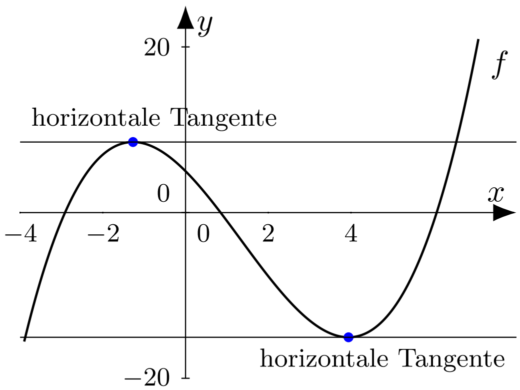
Angenommen, irgendeine Problemstellung hat auf den Graphen einer Funktion f geführt. Die erste Ableitung, f', ist wieder eine Funktion, die nämlich jeder Stelle x (an der die Funktion definiert ist) die Steigung von f, genauer: die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$, zuordnet. Wie kann f' grob, aber im Wesentlichen richtig skizziert werden?



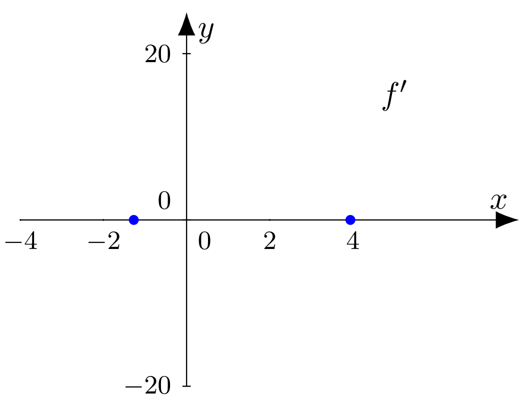
Wir könnten, so ähnlich wie das die Person hier mit einem Surfbrett macht, ein Lineal der Kurve entlang führen und an jeder Stelle die Steigung des Lineals schätzen und all diese Steigungswerte dann in einem neuen Koordinatensystem eintragen.

Abbildung 1: Surfer als Tangente zur Welle/Kurve

Es geht aber einfacher. Offensichtlich hat der Graph ja besonders bemerkenswerte Stellen, an denen die Steigung 0 ist, weil die Tangente horizontal zu liegen käme. An diesen Stellen - hier sind es zwei, nämlich $x_1 \approx -1.27$ und $x_2 \approx 3.94$ - ist also $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$.

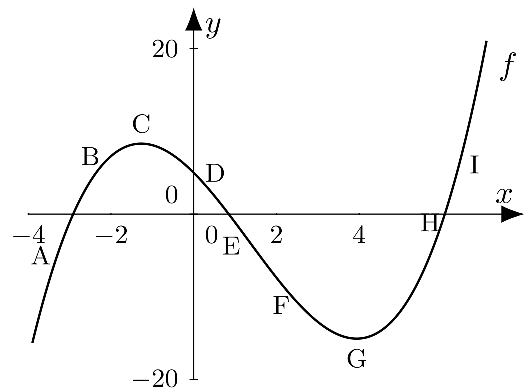


Damit kennen wir schon zwei Punkte des Graphen der Ableitung:

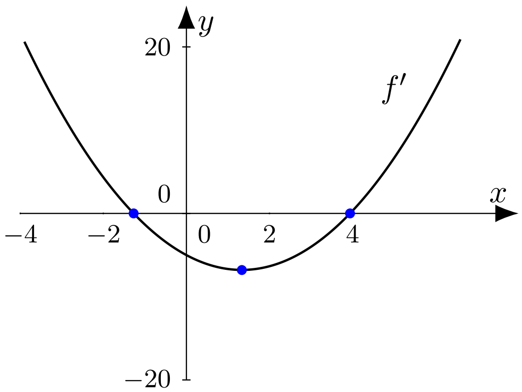


Ein erneuter Blick auf den Graphen von f zeigt uns Folgendes: Links von der Stelle x_1 ist der Graph ansteigend, zwischen den beiden Stellen x_1 und x_2 sinkend und rechts von der Stelle x_2 wieder ansteigend. Damit ist schon einmal klar, dass f' links von x_1 und rechts von x_2 positive Werte und zwischen den beiden Nullstellen negative Werte haben muss.

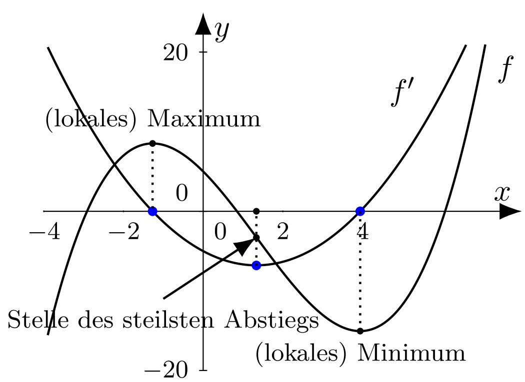
Wir können noch mehr ins Detail gehen. Wenn wir uns den Graphen von f als hügelige Landschaft denken, der wir von links nach rechts entlang wandern sollen, dann werden wir die Erleichterung kurz vor dem höchsten Punkt des Hügels fast körperlich spüren und auch die schmerzenden Knie an der am steilsten abfallenden Stelle ungefähr in der Mitte zwischen Hügel und Tal und schliesslich das Herzrasen bei dem schweisstreibenden Aufstieg an der immer steiler werdenden „Wand“ rechts vom Tal. Unterteilen wir die Wanderung einmal in Abschnitte:



Im Abschnitt A ist die Steigung sehr gross, wir erwarten in dieser Gegend also sehr hohe positive Funktionswerte bei der Ableitung. Wenn wir uns über Abschnitt B der Hügelkuppe C nähern, wird die Steigung immer kleiner, um schliesslich, auf der Kuppe, 0 zu sein. Die Funktionswerte der Ableitung müssen also, wenn sich x von links der Stelle -1.27 nähert, von grossen Werten bis zu 0 absinken. Zwischen C und der Talsohle G sind die Steigungen stets negativ und in der Region von E (wo das Gefälle am stärksten ist) sicher am tiefsten. Daher muss der Graph der Ableitung zwischen $x_1 \approx -1.27$ und $x_2 \approx 3.94$ erst absinken und dann wieder ansteigen, wobei wir zu diesem Zeitpunkt noch nicht ganz sicher sind, wo genau das stärkste Gefälle sein muss. Für x-Werte rechts von der Talsohle wird die Steigung wieder ins Positive anwachsen, erst langsam in der Region H, dann immer schneller in der Region I. All das in Steigungswerte „umgerechnet“ ergibt einen f'-Graphen von ungefähr der folgenden Form:



Legt man beide Graphen übereinander, so erkennt man die Zusammenhänge noch besser:



Natürlich können wir mit so ungenauen Argumenten nicht exakte Steigungswerte ermitteln. Aber wir können wenigstens sagen, an welchen Stellen die erste Ableitung eine Nullstelle hat (nämlich dort, wo der Graph von f eine Extremalstelle hat) und in welchen Bereichen f' positive beziehungsweise negative Werte hat. Und wir können grob sagen, von wo nach wo die Steigung zunimmt beziehungsweise abnimmt.

Merke:

Um den Graphen der 1. Ableitung einer gegebenen Funktion f zu skizzieren, beachte:

Alle Stellen, bei denen der Graph von f eine horizontale Tangente hat, sind Nullstellen bei der Ableitung.

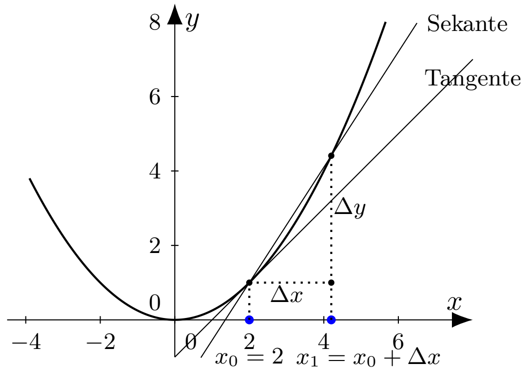
Steigende beziehungsweise sinkende Abschnitte des Graphen von f äussern sich in positiven beziehungsweise negativen Werten bei der Ableitung.

Der Graph der Ableitung kann fallen, obwohl der Graph von f ansteigt, dann nämlich, wenn der Anstieg bei f abbremst.

Eine Stelle maximalen Gefälles oder maximalen Anstiegs bei f äussert sich bei der Ableitung in einem Extremum (Minimum oder Maximum).

All das werden wir bald noch sehr viel präziser ausdrücken können.

Nun wenden wir uns der zweiten angekündigten Frage zu: Wie kann die Ableitung an einer spezifischen Stelle einer gegebenen Funktion f und wie kann die Ableitung als Funktion rechnerisch bestimmt werden? Ohne Zweifel wäre damit sehr viel gewonnen, wissen wir doch bis jetzt nur, wie die Ableitung definiert ist, nicht aber, wie ihre Funktionswerte berechnet werden können. Rufen wir uns dazu noch einmal den schon im Skript 3.1 verwendeten Sprint einer Läuferin in Erinnerung. Die dort verwendete Funktion, $f : x \to 0.25x^2$, sieht so aus:



Wir machen es uns zur Aufgabe, $f'(2)$ zu berechnen, also die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $(2, f(2))$ beziehungsweise die momentane Geschwindigkeit der Läuferin zum Zeitpunkt 2 ihres Sprints. (Hier verfügen wir ja über eine konkrete inhaltliche Interpretation der Ableitung.) Wir machen Gebrauch von der Definition der Ableitung und rechnen:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x_1 \to 2} \frac{f(x_1) - f(2)}{x_1 - 2} \\ &= \lim_{x_1 \to 2} \frac{0.25 \cdot x_1^2 - 0.25 \cdot 2^2}{x_1 - 2} \\ &= \lim_{x_1 \to 2} \frac{0.25 \cdot \left(x_1^2 - 2^2\right)}{x_1 - 2} \\ &= \lim_{x_1 \to 2} \frac{0.25 \cdot (x_1 + 2) \cdot (x_1 - 2)}{x_1 - 2} \qquad (\star) \\ &= \lim_{x_1 \to 2} 0.25 \cdot (x_1 + 2) \\ &= 0.25 \cdot (2 + 2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Können wir genau verstehen, was diese Rechenschritte der Reihe nach leisten? Nun, die Ableitung an der Stelle 2 (in diesem Fall zum Zeitpunkt 2) ist das Resultat eines am Differenzenquotienten ausgeführten Grenzwertprozesses. Der Differenzenquotient selber ist nichts anderes als die Steigung der in der Abbildung eingetragenen Sekante. Bis zu der mit $(\star)$ bezeichneten Stelle dürfen wir nicht einmal im Traum daran denken, den Grenzwertprozess durchzuführen, denn *vor* dem Kürzen des Terms $\Delta x = x_1 - 2$ würden sowohl der Zähler als auch der Nenner zu 0 streben, und der Quotient wäre damit undefiniert. Wir müssen also alles daran setzen, den Ableitungsterm so lange zu bearbeiten, bis der Grenzwertprozess gefahrlos durchgeführt werden kann. Das ist nach der mit $(\star)$ bezeichneten Stelle der Fall. Lassen wir dort x_1 gegen 2 streben, so bedeutet das einfach, dass wir die Sekante in ihre Grenzlage, die Tangente, übergehen lassen und somit am Ende die Steigung der Tangente, also die momentane Änderungsrate, erhalten, in diesem Falle 1.

Was genau bedeutet die Zahl 1? Dass diese spezielle Tangente Steigung 1 hat, also auf eine Einheit in x-Richtung um eine Einheit in y-Richtung ansteigt. Oder, da wir hier ja über eine inhaltliche Interpretation verfügen, dass die Läuferin zum Zeitpunkt 2 eine Momentangeschwindigkeit von 1 LE pro ZE hat.

Achtung: Die Skizze könnte dazu verführen zu denken, dass x_1 rechts von x_0 sein *müsse*. Das trifft natürlich nicht zu und wäre sogar gefährlich. Wäre immer $x_0 < x_1$, so würde obige Berechnung ja nur einen rechtsseitigen Grenzwert berechnen. Ebenso gut kann $x_1 < x_0$ und damit $\Delta x < 0$ sein; die Berechnungsschritte verlaufen dann unverändert, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Das gelang alles sehr mühelos, aber es drängen sich sofort zwei Fragen auf. Erstens: Ist es nicht mühsam, die Ableitung an jeder einzelnen Stelle x_0 individuell zu berechnen? Wäre es nicht viel eleganter, die Ableitung als Funktion zu besitzen, die dann die Steigungswerte in einem

Schlag für *jede* gewünschte Stelle liefern kann? Und zweitens: Verläuft diese Berechnung auch so mühelos, wenn eine andere, eventuell kompliziertere Funktion vorliegt? Dazu gibt es eine gute und eine schlechte Nachricht, und wir beginnen mit der guten:

Wir können obige Berechnung leicht so abwandeln, dass sie die Steigung an einer beliebigen Stelle, anstatt nur an der Stelle 2, liefert. Wir müssen dazu nur die 2 konsequent durch die beliebige Stelle x ersetzen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{0.25 \cdot x_1^2 - 0.25 \cdot x^2}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{0.25 \cdot \left(x_1^2 - x^2\right)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{0.25 \cdot (x_1 + x) \cdot (x_1 - x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} 0.25 \cdot (x_1 + x) \\
&= 0.25 \cdot 2 \cdot x \\
&= 0.5x.
\end{aligned}$$

Mit der h-Notation verläuft die Berechnung sehr ähnlich:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{0.25 \cdot (x+h)^2 - 0.25 \cdot x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{0.25 \cdot \left(x^2 - 2xh + h^2 - x^2\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{0.25 \cdot \left(2xh + h^2\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 0.25 \cdot (2x + h) \\
&= 0.25 \cdot 2 \cdot x \\
&= 0.5x.
\end{aligned}$$

Am Ende steht nun aber nicht mehr eine Zahl, also nicht mehr die Steigung einer speziell ausgewählten Tangente, sondern eine Funktion, die *jeder* Stelle die dort herrschende Steigung zuzuordnen vermag, kurz: die erste Ableitung. Welcher Art ist die Information, die in $f'(x) = 0.5x$ steckt? Ganz einfach: Dass an der Stelle x die Steigung der Tangente $0.5x$ beträgt. Beispielsweise ist die Tangentensteigung an der Stelle 10 gleich 5, an der Stelle -2 gleich -1, an der Stelle 0 gleich 0, und so weiter. Wir kennen an jeder beliebigen Stelle unserer Wanderung die momentane Änderungsrate der Funktion.

Was aber, wenn wir eine andere Funktion zugrunde legen? Probieren wir einmal eine Funktion, die näherungsweise das Beschleunigen eines Sportwagens abbilden könnte (x in Sekunden, y in m/s):

$$f(x) = 86 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0.09 \cdot x}\right).$$

In Anlehnung an obiges Beispiel beginnt die Berechnung der Ableitung hier so:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{86\left(1 - \mathrm{e}^{-0.09x_1}\right) - 86\left(1 - e^{-0.09x}\right)}{x_1 - x} \\
&= \ ?
\end{aligned}$$

Wir stossen sofort auf eine Schwierigkeit. Es ist nicht unmittelbar einsichtig, wie dieser Term so bearbeitet werden kann, dass schliesslich $x_1 - x$ weggekürzt und der Grenzwertprozess durchgeführt werden kann. Das ist die schlechte Nachricht. Das Berechnen einer Ableitung kann unter Umständen ganz schön knifflig sein. Hierzu gibt es also noch viel zu sagen und – glücklicherweise – auch viel Erfreuliches. Mehr dazu in späteren Skripten.

Die meisten modernen Taschenrechner verfügen über ein CAS (Computeralgebrasystem), das in der Lage ist, Ableitungen zu berechnen. Für das Beispiel dieser aktuell untersuchten Funktion liefert etwa der TI Nspire:

$$f'(x) = 7.7989 \cdots \cdot (0.9133 \dots)^x .$$

Demnach lässt sich über die Ableitung an der Stelle 4 - und das wäre dann die momentane Beschleunigung des Sportwagens 4 Sekunden nach Anfahrt aus dem Stillstand - sagen, dass

$$a(4) = f'(4) = 5.426 \dots ,$$

dass also vier Sekunden nach Anfahrt aus dem Stand der Motor eine Beschleunigung von etwa 5.4 m/s pro Sekunde liefert, was bedeutet, dass die Geschwindigkeit während der nächsten Sekunde um etwa 5.4 m/s zunehmen wird.

Merke:

Um $f'(x)$ zu berechnen, notiere den Differenzenquotienten und forme ihn so lange um, bis Δx beziehungsweise $x_1 - x$ oder h gekürzt werden kann. Dann führe den Grenzwertprozess für $\Delta x \to 0$ beziehungsweise $x_1 \to x$ oder $h \to 0$ durch.