Grenzwerte

Armin P. Barth

Bildquellenverzeichnis

1 Armin P. Barth

Was heisst es, dass eine Folge konvergiert?

Betrachten wir zu Beginn die Zahlenfolge

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$$

Sie konvergiert gegen 0. Sie hat den Grenzwert 0. Aber was genau meinen wir damit? Wir könnten sagen, die Werte der aufeinanderfolgenden Zahlen werden immer kleiner, aber damit fangen wir das Wesentliche nicht ein, denn auch die Zahlen $13, 10, 7, 4, 1, -2, -5, \ldots$ werden immer kleiner, aber sie konvergieren nicht. Wir wollen ausdrücken, dass die Zahlen gegen 0 streben, sich dem Wert 0 immer mehr annähern, ihm beliebig nahe kommen, und so weiter, aber das ist alles nicht ganz präzise. In einer Mathematikvorlesung würde man etwa der folgenden Fassung begegnen:

> **Nullfolge**
>
> Die Folge konvergiert gegen 0, weil zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - 0| < \varepsilon$ ist $\forall n > N$.

Beeindruckend, nicht wahr!? Ich erläutere den Sachverhalt jeweils gerne mit Hilfe einer Wette. Nehmen wir an, Alice ist überzeugt, dass unsere Zahlenfolge gegen 0 konvergiert, Bob glaubt aber nicht, dass die Zahlen beliebig nahe an 0 herankommen. Bob sagt also zum Beispiel: „Ich wette, dass die Zahlen nie näher als 0.0001 an 0 herankommen, egal, wie weit wir in der Folge voranschreiten.“ Alice entgegnet: „Ach was, kein Problem, ich greife mir einfach das 100-te Glied der Folge heraus. Es hat den Wert $1/100^2 = 0.0001$. Da die Folgeglieder immer nur kleiner, aber nie negativ werden, sind also alle dem 100-ten Glied folgenden Zahlen weniger also 0.0001 von 0 entfernt.“

Bob lässt die verlorene Wette nicht so einfach auf sich sitzen und pokert höher: „Okay, dann wette ich nun aber, dass die Zahlen nie näher als 0.00000025 an 0 herankommen.“ Das lässt Alice kalt. Sie antwortet: „Unsinn! Ich gehe einfach zum Folgeglied Nummer 2000. Dieses hat den Wert $1/2000^2 = 0.00000025$. Alle unendlich vielen Zahlen, die auf das 2000-te Glied folgen, sind also weniger als die von Dir angegebene Distanz von 0 entfernt.“

Bob verliert allmählich den Mut. Und wie, um ihn definitiv zu besiegen, legt Alice nach: „Egal, wie klein die Zahl ε sein mag, die Du mir nennst, ich kann immer eine Stelle N angeben, so dass alle unendlich vielen Folgeglieder, die auf diese Stelle folgen, weniger weit als von 0 entfernt sind. Ich rechne nämlich:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < n. \end{aligned}$$

Gibst Du mir also ein ε, so rechne ich $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ aus und nehme die nächstgelegene ganze Zahl N.“

In der Tat kann man die Umgebung um die Zahl Null so eng schnüren, wie man will, stets lässt sich eine Stelle in der Folge finden, so dass alle unendlich vielen auf diese Stelle folgenden Glieder der Folge sich innerhalb der Umgebung befinden. Für jede noch so eng geschnürte Umgebung gilt: Ab einer bestimmten Stelle gibt es für die Zahlen kein Entrinnen mehr, ab einer bestimmte Stelle werden sie die Umgebung nie mehr verlassen können. Und genau das meint man mit Konvergenz.

Nicht immer ist die Bestimmung eines allfälligen Grenzwertes so einfach wie in unserem einleitenden Beispiel. Dass die Folge $\frac{1}{n^2}$ „von oben gegen 0 strebt“, ist sehr einfach zu sehen. Betrachtet man nun aber etwa die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und berechnet einige Glieder, so findet man:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2.25 \\ a_3 &= 2.370\ldots \\ a_4 &= 2.4414\ldots \\ &\ldots \\ a_{100} &= 2.70481\ldots \\ a_{1000} &= 2.71692\ldots \\ a_{100000} &= 2.71827\ldots \end{aligned}$$

Die Folge scheint zu konvergieren, aber es ist zunächst weder klar, dass das wirklich der Fall ist, noch, welches der genaue Grenzwert ist.

Immer mehr zuschnüren...

Wenn wir sagen, eine Folge konvergiere gegen einen bestimmten Grenzwert, so meinen wir also, dass der Abstand ihrer Glieder zu diesem Grenzwert mit wachsendem Index immer kleiner wird und unter jede beliebige Schranke sinkt. Wichtig dabei ist auch, dass die Folgeglieder sich später nicht mehr von dem Grenzwert entfernen. Wir meinen, dass der Abstand der Glieder vom Grenzwert ab irgendeinem Index unter z.B. 0.001 sinkt und dass auch alle nachfolgenden Glieder diesen Abstand einhalten, und weiter, dass dasselbe auch für den Abstand 0.0001 und für den Abstand

$$0.0000000000000000000000000000001$$

und für jeden beliebig kleinen vorgegebenen Wert gilt. Noch einmal, weil es so wichtig ist: Es muss möglich sein, dass wir den Abstand immer mehr „zuschnüren“, und dass wir dann trotzdem immer einen Index finden können, ab dem dieser Abstand zum Grenzwert für die unendlich vielen restlichen Folgeglieder permanent eingehalten wird. Nur wenn diese Möglichkeit besteht, sind wir wirklich davon überzeugt, dass die Folge gegen den bestimmten Wert konvergiert.

Die zentrale Definition

Die nun folgende Definition will ein präzises Kriterium dafür nennen, ob eine Folge konvergiert oder nicht. Da alles Folgende auf einem genauen Verständnis dieser Definition beruht, kann nicht genügend betont werden, wie wichtig sie ist.

Definition:
*Die Folge (a_n) hat den **Grenzwert (Limes)** g, genau dann wenn zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert, so dass $|a_n - g| < \varepsilon$ gilt $\forall n > N$.*
Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \textit{oder} \quad a_n \to g \textit{ für } n \to \infty$$

*Eine Folge heisst **konvergent**, falls eine reelle Zahl g existiert, so dass*

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Stellen wir uns das ganz bildlich vor: Eine konvergente Folge ist doch eine, deren Glieder einer bestimmten Zahl g immer näher kommen; wir können auch sagen: Der Abstand von a_n zu g wird mit wachsendem n immer kleiner. Formal sieht das so aus: $|a_n - g|$ wird mit wachsendem n immer kleiner! Was heisst das? Nun, ab irgendeinem Index wird dieser Abstand stets < 2 sein, ab irgendeinem (grösseren) Index wird kein Folgeglied weiter als 0.5 von g entfernt sein, ab einem (noch grösseren) Index wird kein Folgeglied mehr weiter als 0.0001 von g mehr entfernt sein, usw. Wenn wir also eine (noch so) kleine Zahl vorgeben – ab irgendeinem bestimmten Index werden die Abstände der Folgeglieder zu g immer kleiner sein als diese vorgegebene Zahl. Und das lässt sich eben auch so ausdrücken: Zu jeder beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index N, so dass alle späteren Folgeglieder weniger als ε von g abweichen.

Erste Beispiele

Betrachten wir sogleich ein paar einfache rechnerische Beispiele:

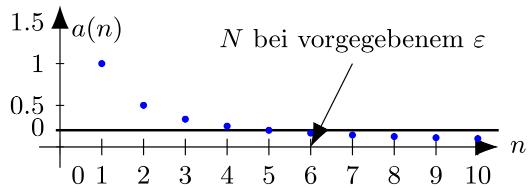
Im ersten Beispiel sei $a_n = 1/n$. Wir vermuten natürlich stark, dass die Folge den Grenzwert 0 hat. Wie kann man das streng nachweisen? Nun, dazu wählen wir ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Nun müssen wir nachweisen, dass man sicherlich einen Index N finden kann, ab dem dieser Abstand zum vermuteten Grenzwert permanent unterschritten wird:

$$\begin{aligned}
& |a_n - 0| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n} < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\varepsilon} < n.
\end{aligned}$$

Offenbar gelingt es für jeden beliebig kleinen Abstand, einen solchen Index zu nennen, nämlich

$$N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil .$$

Und damit ist streng nachgewiesen, dass unsere Folge den Grenzwert 0 hat, denn die in der Definition genannte Bedingung ist verifiziert.



Betrachten wir noch ein Beispiel:

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

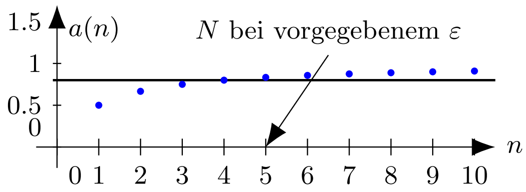
Wir vermuten den Grenzwert 1 und weisen das streng nach:

Sei wiederum $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

$$\begin{aligned}
& |a_n - 1| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1}{n+1} < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n.
\end{aligned}$$

Offenbar können wir auch hier die in der Definition von Konvergenz gestellte Forderung erfüllen: Wir können stets einen von ε abhängigen Index nennen, ab dem der ε-Abstand zu 1 permanent unterschritten wird, nämlich:

$$N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil .$$



Die Definition ist etwas technisch, aber vielleicht vermögen Sie auch die Vorteile zu sehen: Die Definition konkretisiert unsere bis anhin eher vage Vorstellung eines „Hinstrebens“, und sie liefert gleichzeitig ein scharfes Kriterium dafür, ob eine Folge konvergiert - und wohin!

In unserem nächsten Beispiel ist $a_n = 2$. Das ist eine konstante Folge. Ist eine konstante Folge konvergent? Kann man sagen, sie hat Grenzwert 2, obwohl sie diesen Wert ja von Anfang an annimmt und immer beibehält? Die Definition von Konvergenz schafft Klarheit:

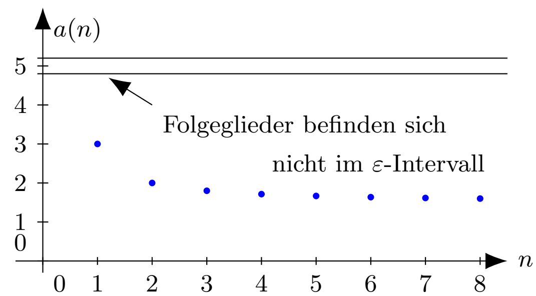
Wenn wir den Grenzwert 2 vermuten, müssen wir nachweisen, dass es zu jeder noch so kleinen Schranke ε gelingt, einen Index N zu finden, ab dem die Distanz der Folgeglieder zu 2 permanent unter dieser Schranke liegen wird. Schaffen wir das? Ja klar, sogar auf sehr einfache Weise. Der Abstand $|a_n - 2|$ ist stets Null und somit von Anfang an kleiner als die Schranke ε. Es genügt also, wenn wir $N = 1$ wählen. Das Konvergenzkriterium ist somit erfüllt, und wir können mit Fug und Recht sagen, dass jede konstante Folge konvergiert.

Was, wenn man sich beim Grenzwert irrt?

Nun sollten wir einmal ein Beispiel betrachten, bei dem wir einen falschen Grenzwert vermuten und uns davon überzeugen, dass sich dann eben nicht zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index N finden lässt, ab dem alle folgenden Folgeglieder weniger als ε vom vermuteten Grenzwert entfernt sind. Wir wählen dazu die Folge

$$a_n = \frac{3n}{2n-1}$$

und nehmen an, dass wir fälschlicherweise den Grenzwert 5 vermuten. Dass das falsch ist, zeigt ein Blick auf die Folge:



Dennoch: Was geschieht, wenn wir versuchen zu zeigen, dass 5 der Grenzwert ist, obwohl das nicht stimmt? Nun,

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{3n}{2n-1} - 5\right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{3n - 5\cdot(2n-1)}{2n+1}\right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{5-7n}{2n-1}\right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{7n-5}{2n-1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Warum soll es nicht möglich sein, daraus einen Index N zu bestimmen? Wo genau liegt das Problem? Nun die weitere Umformung macht das deutlich:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & 7n - 5 < 2n\cdot\varepsilon - \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & (7-2\varepsilon)\cdot n < 5 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wir wollen durch $(7-2\varepsilon)$ dividieren, stellen aber fest, dass das nur geht, wenn $\varepsilon \neq 3.5$ ist. Was ist so besonders an der Zahl 3.5? Nun, der reale Grenzwert unserer Folge ist 1.5. Mit der Vermutung 5 liegen wir also genau 3.5 daneben. Das bedeutet, dass – und das zeigt ja auch die Skizze – sämtliche Folgeglieder den Abstand 3.5 zum realen Grenzwert einhalten. Mit $\varepsilon = 3.5$ ist obige Ungleichung für jedes beliebige n erfüllt.

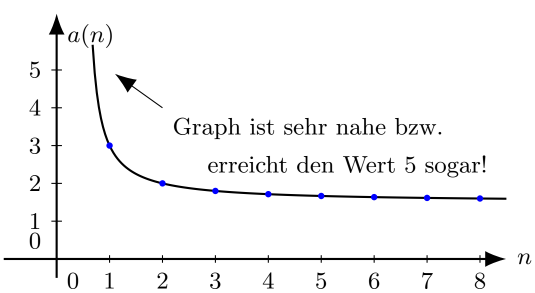
Wenn wir uns nun ε allerdings sehr klein vorstellen – und das sollten wir ja bei Grenzwertuntersuchungen tun – dann ist der Faktor $(7 - 2\varepsilon)$ sicherlich positiv. Eine Division führt nun also auf:

$$n < \frac{5-\varepsilon}{7-2\varepsilon}.$$

Was ist geschehen? Nun, zunächst einmal steht hier „$n < \ldots$“ und nicht „$n > \ldots$“, wie es eigentlich sein sollte. Dann hat dieser Term ungefähr den Wert $\frac{5}{7}$, was merkwürdig ist. Es gibt kein Folgeglied mit diesem Index. Warum liefert die Rechnung ein so unsinniges Resultat? Wenn wir uns die Folge als Funktion

$$f(x) = \frac{3x}{2x-1}$$

denken, wird alles klar:



Der Term $(3x)/(2x-1)$ kann durchaus ganz nahe bei 5 sein, allerdings nur, wenn x sehr nahe bei $5/7$ ist. Die Folge (a_n) allerdings wird nie in die Nähe von 5 kommen, und die Rechnung zeigt uns das in aller Deutlichkeit. Wir sehen also, dass falsche Vermutungen jederzeit auffliegen, was überaus beruhigend ist.

Ein besonders wichtiges Beispiel

Das nun folgende Beispiel ist etwas schwieriger und dennoch von grosser Wichtigkeit für spätere Überlegungen. Wir betrachten die Folge $a_n = q^n$ für ein reelles q mit der Eigenschaft $0 < |q| < 1$. Die naheliegende Vermutung ist, dass diese Folge Grenzwert 0 hat, und das soll nun bewiesen werden:

Zunächst ist

$$|a_n - 0| = |q^n| = |q|^n.$$

Da $0 < |q| < 1$ ist, können wir $|q|$ in der Form $\frac{1}{1+a}$ schreiben für eine reelle Zahl $a > 0$. Damit ist dann

$$|a_n - 0| = |q|^n = \left(\frac{1}{1+a}\right)^n = \frac{1}{(1+a)^n}.$$

Nach der *Ungleichung von Bernoulli* (die sich leicht mit vollständiger Induktion beweisen lässt), gilt für die hier gewählten Zahlen, dass $(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n$ ist. Folglich ist

$$|a_n - 0| = \frac{1}{(1+a)^n} \leqslant \frac{1}{1+a\cdot n}.$$

Schliesslich ist

$$\begin{aligned} & |a_n - 0| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{(1+a)^n} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{a}. \end{aligned}$$

Wir sehen: Wir können zu jeder noch so kleinen Schranke ε einen Index finden, ab dem die in der Grenzwert-Definition formulierte Bedingung gilt. Daher gilt die Behauptung.

Grenzwertsätze

Die nun folgenden fünf Sätze sind von zentraler Bedeutung. Sie regeln den rechnerischen Umgang mit Grenzwerten. Die Aussagen dürften Ihnen naheliegend erscheinen. Verglichen mit dieser Klarheit wirken die Beweise vielleicht etwas kompliziert und gesucht, und deshalb werden wir hier nur einen der Sätze streng beweisen und bei den restlichen auf die Literatur verweisen. Angenommen, wir sollen den Limes der Folge

$$a_n = 0.8^n + \frac{2n}{n+1}$$

bestimmen. Wir wissen bereits, dass

$$0.8^n \to 0$$

und dass

$$\frac{2n}{n+1} \to 2.$$

Können wir nun die Grenzwerte der beiden Teilfolgen einfach addieren? Es scheint klar, dass das korrekt ist; dennoch sollten wir versuchen, ein allgemeines Resultat zu beweisen:

Satz:
Gegeben sind zwei Folgen: (a_n) und (b_n). Falls beide Folgen konvergent sind mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = h,$$

so ist auch die Folge $c_n := a_n + b_n$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = g + h.$$

Beweis. Wir wählen – wie üblich – ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Da die erste Folge konvergent ist, existiert sicherlich ein Index N_1, so dass

$$|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall n > N_1.$$

Da die zweite Folge konvergent ist, existiert sicherlich ein Index N_2, so dass

$$|b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > N_2.$$

Dann gilt für alle $n > \max\{N_1, N_2\}$, dass

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (g+h)| &\leqslant |(a_n - g)| + |(b_n - h)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Dreiecksungleichung benutzt. Insgesamt ist die Behauptung also nachgewiesen. □

Tatsächlich kann man auf ähnliche Weise zeigen, dass der Limes alle vier Grundrechenarten respektiert. Ist also $*$ eine der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division, so gilt, dass der Limes der Folge $a_n * b_n$ sich in naheliegender Weise aus den Limites der Teilfolgen berechnen lässt. Dabei muss allerdings vorausgesetzt werden, dass die Limites der Teilfolgen auch wirklich existieren – und im Falle der Division muss zusätzlich vorausgesetzt werden, dass weder die Folge b_n noch ihr Grenzwert den Wert 0 annehmen kann, denn sonst würde ja eine Division durch 0 durchgeführt. Insgesamt haben wir also folgendes Resultat:

Satz:
Sei $*$ eine der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division. Gegeben sind zwei Folgen: (a_n) und (b_n). Falls

beide Folgen konvergent sind mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = h,$$

so ist auch die Folge $c_n := a_n * b_n$ *konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = g * h.$$

Im Falle der Division muss zusätzlich $b_n \neq 0$ *und* $h \neq 0$ *verlangt werden.*

Dieser Satz hat deutliche Vorteile. Angenommen, wir sollen den allfälligen Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{3n^2 - 7n + 15}{22 - 2n^2}$$

bestimmen. Eine Erweiterung mit dem Faktor $\frac{1}{n^2}$ beschert uns sofort lauter konvergente Teilfolgen:

$$a_n = \frac{3 - 7\frac{1}{n} + 15\frac{1}{n^2}}{\frac{22}{n^2} - 2}.$$

Da der Limes alle Grundoperationen respektiert, können wir den Grenzwert der Folge aus den Grenzwerten der Teilfolgen berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3 - 0 + 0}{0 - 2} = -1.5.$$

Grenzwert arithmetischer / geometrischer Folgen oder Reihen

Können arithmetische und geometrische Folgen und Reihen auch konvergieren? Nun, in der Tat ist von den hier genannten vier Fällen nur einer wirklich interessant. Bei einer arithmetischen Folge ist bekanntlich $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ mit konstanter Differenz d. Mit wachsendem Index n kann diese Folge also nur konvergieren, wenn $d = 0$ ist, und dann ist die Folge konstant und somit konvergent.

Bei der arithmetischen Reihe ist

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \\ &= \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d) \\ &= n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d. \end{aligned}$$

Mit wachsendem Index n kann diese Reihe also nur konvergieren, wenn $d = 0$ und überdies $a_1 = 0$ ist – auch keine sonderlich spannende Situation.

Bei der geometrischen Folge ist $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ mit konstantem Quotienten q. Mit wachsendem Index n kann diese Folge nur konvergieren, wenn $|q| < 1$ ist (und zwar gegen 0) oder wenn $q = 1$ ist (und dann ist sie konstant).

Bei der geometrischen Reihe ist die Situation interessanter: Dort gilt ja (falls $q \neq 1$ ist):

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Nun haben wir weiter oben gezeigt, dass die Folge q^n für ein q mit der Eigenschaft $0 < |q| < 1$ gegen 0 konvergiert. Da der Limes zudem die Grundoperationen respektiert, können wir folgenden Satz festhalten:

Satz:
Es sei (s_n) *eine geometrische Reihe mit dem Quotienten* q. *Dann gilt: Falls* $0 < |q| < 1$ *ist, ist die Reihe konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Beispiel: Was können wir über die allfällige Konvergenz der Folge

$$a_n = 5 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}$$

und ihrer Reihe sagen? Nun, es ist offenbar eine geometrische Folge mit $a_1 = 5$ und $q = 7/8$. Da $0 < |q| < 1$ erfüllt ist, wird die Folge den Grenzwert 0 haben und die Reihe den Grenzwert

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{7}{8}} = 40.$$

Das Aufaddieren beliebig vieler Glieder dieser Folge wird also Summen produzieren, die nie über 40 hinausgehen und schliesslich jeden noch so kleinen Abstand zu 40 unterschreiten.

Gottes Trick bei der Erschaffung der Welt

Zu Beginn des 18. Jahrhunderts brachte der italienische Mathematiker *Guido Grandi* eine bestimmte mathematische Reihe in Beziehung zu Gottes Erschaffung der Welt. Er untersuchte die alternierende Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

und fragte sich, welchen Summenwert man dieser Reihe wohl zuordnen kann, wenn man sie nach rechts hin unendlich lange fortsetzt. Er entdeckte, dass die Reihe in gewissem Sinne das Nichts repräsentiert, weil man die Zahlen so klammern kann:

$$\begin{aligned} &(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ =&0 + 0 + 0 + 0 + \ldots \\ =&0. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Überraschenderweise liefert aber eine andere Klammerung einen anderen Summenwert:

$$\begin{aligned} &1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ =&1 + 0 + 0 + 0 + \ldots \\ =&1 \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

Grandi schloss daraus, dass Gott einen ganz ähnlichen Trick benutzt haben müsse, um Etwas aus dem Nichts zu kreieren. Die moderne Mathematik hat gezeigt, dass dieses Argument verfehlt ist. Die Grandi-Reihe hat eben keinen Summenwert, weil sie nicht konvergent ist. Gäbe es nämlich einen Summenwert S, dann würden Grandis Überlegungen zeigen, dass ($\star$) $S = 0$ und gleichzeitig ($\star\star$) $S = 1$ ist. Durch Addition der beiden Gleichungen ($\star$) und ($\star\star$) liesse sich dann $2S = 1$, also $S = 0.5$ folgern, und wenn man zur Gleichung ($\star$) das Doppelte von Gleichung ($\star\star$) addieren würde, würde man $3S = 2$, also $S = 2/3$ erhalten, und so weiter. Die Annahme, ein Summenwert S würde existieren, beschert uns also ein heilloses Durcheinander und offensichtliche Widersprüche.

Dass die Grandi-Reihe nicht konvergiert, sieht man sofort, wenn man die Folge der Partialsummen notiert: $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots$

Offenbar lässt sich keine Zahl g finden, so dass für jedes noch so kleine ε ein Index N gefunden werden kann mit der Bedingung $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

Warum selbst der schnellste Läufer die Schildkröte nie einholen kann!

Es gibt wohl kaum ein unfaireres Rennen als das zwischen einem menschlichen Läufer und einer Schildkröte. Das Tier ist absolut chancenlos, und der menschliche Läufer dürfte schon ausser Sichtweite sein, bevor die Schildkröte sich merklich vom Startpunkt wegbewegt hat. Die Situation ändert sich aber drastisch zu Gunsten der Kröte, wenn ihr ein Vorsprung gewährt wird. Dann ist sie sogar uneinholbar, und das ist eine wirklich erstaunliche Angelegenheit!

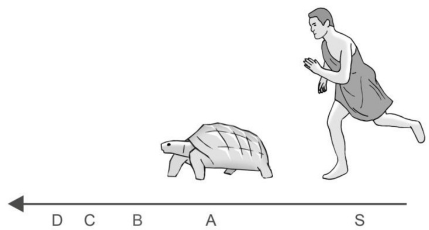


Abbildung 1: Achilles und die Schildkröte

Glauben Sie mir nicht? Nun, hier ist der Beweis: Wir stellen uns vor, ein Läufer und eine Schildkröte seien zum Rennen verabredet. Die Rennbahn ist eine schnurgerade und beliebig lange Strecke, und aus Mitleid (oder um seinem vermeintlichen Triumph noch mehr Glanz zu verleihen) lässt der Läufer dem Tier einen Vorsprung von 100 Metern. Um präziser argumentieren zu können, führen wir zwei Bezeichnungen ein: den Buchstaben S für den Startpunkt des Läufers und den Buchstaben A für den Startpunkt der Schildkröte (vgl. Abbildung). Auf Kommando starten beide gleichzeitig und rasen davon, auch wenn das Verb „rasen“ für eine Schildkröte etwas gewagt scheint. Nun dauert es eine bestimmte Zeit, bis der Läufer die Stelle A erreicht, an der die Schildkröte gestartet ist. In dieser Zeit hat sich die Schildkröte natürlich bewegt, wenn auch vielleicht nicht sehr weit. Sagen wir, sie erreicht die Position B exakt in dem Augenblick, in dem der Läufer die Stelle A erreicht. Nun muss der Läufer, will er das Tier einholen, die Stelle B erreichen, und dazu benötigt er eine gewisse Zeit. Wenn er in B ankommt, ist die Schildkröte natürlich nicht mehr dort, denn sie ist in dieser Zeit an eine Stelle C „weitergerannt“. Nun muss der Läufer, will er das Tier einholen, die Stelle C erreichen, und dazu benötigt er eine gewisse Zeit. Wenn er in C ankommt, ist die Schildkröte natürlich nicht mehr dort, denn sie ist in dieser Zeit an die Stelle D weiter „gerannt“.

Sie können sich denken, wie es weitergeht: Die Strecken, die der Läufer überwinden muss, um das Tier einzuholen, werden zwar immer kürzer, aber in jedem Augenblick ist die Schildkröte vor dem Läufer, denn man kann theoretisch unendlich viele Positionen $A, B, C, D, E, \ldots$ nennen, die der Läufer erreichen muss, um das Tier einzuholen, und die das Tier aber immer schon verlassen hat in dem Augenblick, in dem der Läufer dort ankommt. Daher kann der Läufer die Schildkröte nie einholen, und in ungläubigem Entsetzen und völliger Erschöpfung wird er hinter ihr zusammenbrechen.

Die hier wiedergegebene Argumentation stammt von *Zenon*, einem Schüler des griechischen Philosophen *Parmenides*, der um 500 v. Chr. im heutigen Unteritalien lebte. Es ist uns allen klar, und es war sicherlich auch Zenon klar, dass der Läufer - bei Zenon handelte es sich um *Achill* - die Schildkröte einholen wird. Dennoch ist sein Argument raffiniert und überaus verlockend, und manch einer wird zugeben müssen, nicht genau zu verstehen, weshalb es falsch ist. Es stellt sich also die Frage, zu welchem Zweck Zenon sein Argument aufgestellt hatte – und wie es sich entkräften lässt?

Zur ersten Frage kann man nur mutmassen, zu unsicher ist die Quellenlage bei so alten Texten. Sehr wahrscheinlich ist, dass Zenon die Lehre seines Meisters Parmenides stützen wollte, die sich ungefähr so umschreiben lässt: Gewöhnlich urteilen die Menschen auf Grund der Sinneserfahrungen; diese aber sind „ziellos“ und „brausend“ und bringen nichts als Wahnvorstellungen hervor. Allein die Vernunft urteilt logisch, und darum darf man nur auf sie allein vertrauen. Die Vernunft aber sagt: Aus Nichts kann nichts entstehen, also muss das Sein immer schon so gewesen sein, und es kann sich nichts verändern, denn sonst würde etwas vergehen oder zum Seienden aus dem Nichts etwas hinzukommen. Alles sich Verändernde ist also Trugbild, in Wirklichkeit ist immer alles eins und unverändert. Insbesondere gibt es auch keine Bewegung, denn sie wäre ja Veränderung von Seiendem.

Man kann über diese Lehre urteilen, wie man will, Zenon jedenfalls muss ein treuer Schüler gewesen sein, denn er tat alles, um die These seines Lehrers zu untermauern. Seine Geschichte vom Läufer und der Schildkröte sollte wahrscheinlich die gegnerische Annahme, es gäbe so etwas wie Veränderung und Bewegung, ad absurdum führen. Wenn es Bewegung gäbe, müsste das Rennen zwischen Achill und dem Tier möglich sein, aber dann wäre das Tier uneinholbar, was Unsinn ist. Also kann es keine Bewegung geben. Mit solchen spitzfindigen Argumenten liessen sich die Gegner von Parmenides (allen voran *Heraklit*) vielleicht beeindrucken, falsch sind sie aber trotzdem.

Man kann zwar unendlich viele Vorsprünge der Schildkröte auflisten: $SA, AB, BC, CD, DE, \ldots$ und so fort, das heisst aber noch lange nicht, dass alle diese unendlich vielen kleiner werdenden Strecken zusammengezählt zu einer unendlich langen Gesamtstrecke führen oder dass unendlich viel Zeit benötigt wird, um sie alle zurückzulegen. Sie können selber ausrechnen, wann und wo der Läufer das Tier ein- und überholen wird.

Führen wir, um das Problem rechnerisch anzupacken, zuerst ein paar Bezeichnungen ein. Sei v_L die Geschwindigkeit des Läufers und v_S die Geschwindigkeit der Schildkröte und überdies $v_S = q \cdot v_L$ für ein $0 < q < 1$. Damit sagen wir einfach, dass das Tier langsamer ist als der Mensch. Sei ferner s_0 der Vorsprung, den der Läufer der Kröte gewährt, also $s_0 = |SA|$. Ziel muss es sein, die Längen der einzelnen Strecken $AB, BC, CD, \ldots$ herauszufinden.

Zunächst einmal werden die Strecken SA und AB in derselben Zeit zurückgelegt. Daher folgern wir

$$\frac{s_0}{v_L} = \frac{|AB|}{v_S},$$

bzw.

$$|AB| = \frac{v_S}{v_L} \cdot s_0 = q \cdot s_0.$$

Auch die Strecken AB und BC werden in derselben Zeit zurückgelegt. Also ist

$$\frac{|AB|}{v_L} = \frac{|AB|}{v_S},$$

bzw.

$$|BC| = \frac{v_S}{v_L} \cdot |AB| = q \cdot (q \cdot s_0) = q^2 \cdot s_0.$$

So fortfahrend wird klar, dass die einzelnen Strecken die Längen

$$s_0, q \cdot s_0, q^2 \cdot s_0, q^3 \cdot s_0, q^4 \cdot s_0, \ldots$$

haben. Die Frage ist also, was wohl geschieht, wenn man alle unendlich vielen (!) Streckenlängen addiert. Wird das Resultat dieser Summenbildung unendlich gross, so hat Zenon recht, und der Läufer kann das Tier niemals einholen. Die Addition aller Streckenlängen führt auf den Term

$$s_0 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots)$$

Dies ist eine geometrische Reihe mit dem ersten Glied s_0 und dem Quotienten q. Da aber $0 < q < 1$ vorausgesetzt wurde, ist diese Reihe konvergent, strebt also insbesondere gegen einen endlichen Wert. Die Tatsache, dass der Läufer unendlich viele Strecken zurücklegen muss, um das Tier einzuholen, war für Zenon der „Beweis", dass die Schildkröte uneinholbar ist. Aber jetzt wissen wir, dass die unendlich vielen Strecken auf die endliche Gesamtlänge

$$s_{\text{total}} = \frac{s_0}{1 - q}$$

führen. Achilles holt die Schildkröte also - wie erwartet - in endlicher Zeit ein. Ist speziell $q = 0.5$, das Tier also genau halb so schnell wie der Läufer, so ist $s_{\text{total}} = 2 \cdot s_0$.

Diese Aufgabe macht eindrücklich bewusst, dass die Mathematik der Antike im Wesentlichen nur statische Probleme lösen konnte. Der Abstand zwischen Läufer und Schildkröte dagegen ändert sich dynamisch, und eine solche sich verändernde Grösse war mit den damaligen Methoden kaum zu erfassen. Es ist ein grosses Verdienst von *Gottfried Wilhelm Leibniz* und *Isaac Newton*, die Mathematik sehr viel später, nämlich im 17. Jahrhundert, um Methoden bereichert zu haben, die dynamische Prozesse berechenbar machten.

Weitere schöne Grenzwertsätze

Mit den bisherigen Methoden lassen sich einige weitere wichtige Grenzwertsätze beweisen, die wir hier nur in loser Folge und ohne nähere Ausführungen auflisten. Die einfachen Beweise überlassen wir den Leserinnen und Lesern als Übung.

Satz:
Die Folge (a_n) konvergiert gegen den Limes g, genau dann wenn sich in jeder beliebig kleinen Umgebung von g fast alle (das heisst alle bis auf endlich viele) Glieder der Folge befinden.

Satz:
Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Satz:
Eine konvergente hat genau einen Grenzwert. (Es kann also nicht mehr als einen Grenzwert geben.)

Satz:
Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, dann ist auch $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

Satz:
Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit Grenzwert g. Und sei (c_n) eine weitere Folge mit der Eigenschaft $a_n < c_n < b_n, \quad \forall n$, dann ist auch die Folge (c_n) konvergent, und es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} c_n = g.$$