Folgen und Reihen

[Grundlagen]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 Armin P. Barth

Welche Zahl kommt als nächstes?

Manchmal findet man in IQ-Tests oder auf Rätselseiten von Zeitschriften Fragen der folgenden Art:

Welche Zahl kommt als nächstes?

a) $3, 9, 5, 15, 11, 33, \dots$

b) $1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots$

c) $15, 9, 27, 20, 60, 52, \dots$

d) $9, 12, 18, 30, 54, 104, \dots$

e) $14, 16, 13, 52, 57, 51, \dots$

f) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

g) $7, 11, 15, 19, 23, 27, \dots$

h) $1, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{7}, 1, \dots$

Zunächst einmal muss betont werden, dass man diese Frage gar nicht eindeutig beantworten kann. Kennt man nur die ersten paar Zahlen einer Folge, so kann man sich mehrere mehr oder weniger komplizierte Bildungsgesetze einfallen lassen, die genau diese Zahlen in dieser Reihenfolge erzeugen. Immerhin ist es meist so, dass ein Bildungsgesetz besonders einfach und damit naheliegend ist - und genau dieses ist auch meistens gesucht.

In diesem Text geht es darum, dass wir genau verstehen, was eine Folge und was eine Reihe ist und dass wir besonders häufige Bildungsmuster kennenlernen und auch mit den jeweiligen Fachbegriffen ausstatten können.

Was ist eine Folge

Die Beispiele a) - h) zeigen Anfänge von sogenannten Folgen. Eine *Folge* ist - salopp gesagt - eine Anordnung von Zahlen, in der es nach einer bestimmten Regel oder Formel eine erste, zweite, dritte,... Zahl gibt. Die Symbolik $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ bedeutet, dass eine Folge namens a vorliegt und dass diese der Reihe nach aus den Gliedern $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ besteht. Das beliebige (n-te) *Glied* wird mit a_n bezeichnet, wobei der Index n die Nummer des Gliedes in der Folge bezeichnet. Freilich kann die Folge auch mit anderen Buchstaben als a bezeichnet werden.

Wie immer bei mathematischen Definitionen muss man ganz präzise sein. Darum geben wir eine zweite Charakterisierung an, die nicht so schwammige Ausdrücke wie „Anordnung“, „Regel“, usw. enthält:

Definition:
Eine (reelle) ***Folge*** *a ist eine Funktion $a : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}$, unter der jedem Index $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine reelle Zahl $a_n := a(n) \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird.*

Wie sieht das bei den Beispielen a) - h) aus? Greifen wir ein paar einfache Beispiele heraus:

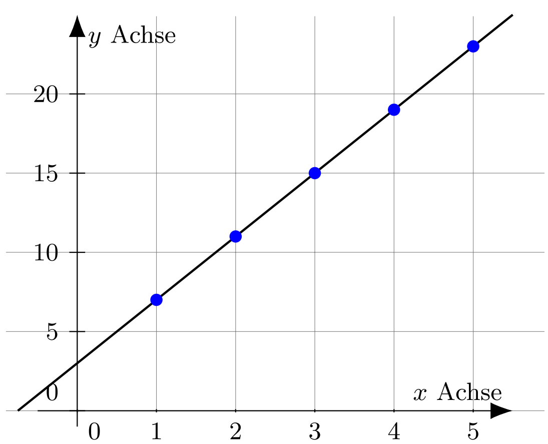
Bei f) liegt der Folge wahrscheinlich (aber eben: nicht sicher!) das Bildungsgesetz $a_n = 2^{n-1}$ zugrunde. Jedenfalls stimmt das für alle angezeigten Werte. Bei g) liegt der Folge wahrscheinlich das Bildungsgesetz $a_n = 7 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 3$ zugrunde. Bei h) kommen wir kaum ohne Fallunterscheidung aus:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls n ungerade,} \\ \frac{n}{n+1} & \text{falls n gerade.} \end{cases}$$

Da eine Folge einfach eine spezielle Funktion ist, können wir alles je über Funktionen Gelernte auf Folgen übertragen. Beispielsweise zeigt g) eine lineare Funktion, was noch viel deutlicher wird, wenn wir die beiden Schreibweisen untereinander stellen:

$$\begin{aligned} \text{Folge :} \qquad & a_n = 4n + 3 \\ \text{Funktion :} \qquad & f(x) = 4x + 3. \end{aligned}$$

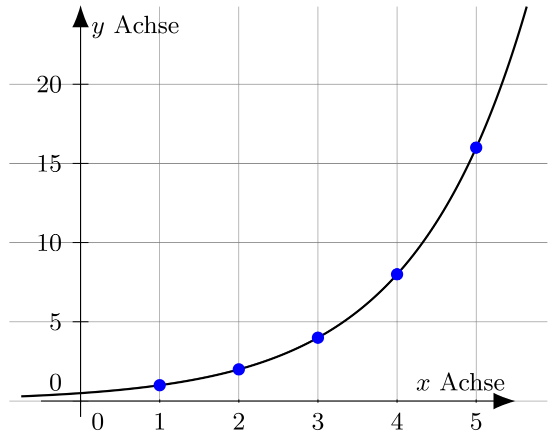
Während wir den Input der Funktion üblicherweise aus der Menge der reellen Zahlen schöpfen, sind als Argumente bei der Folge freilich nur die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ erlaubt. Das bedeutet, dass der Graph der Folge nur aus einzelnen Punkten besteht, die natürlich auf der Geraden liegen, welche wir als Graph der reellen Funktion erhalten würden:



Beispiel f) liegt eine Exponentialfunktion zugrunde:

$$\begin{aligned} \text{Folge:} \qquad & a_n = 2^{n-1} = 0.5 \cdot 2^n \\ \text{Funktion:} \qquad & f(x) = 0.5 \cdot 2^x \end{aligned}$$

Wiederum besteht der Graph der Folge nur aus einzelnen Punkten auf der Kurve einer reellen Exponentialfunktion:



Man kann also durchaus sagen, dass eine Folge die ihr zugrundeliegende Funktion *abtastet*.

Grosse Bekanntheit hat die Folge $a_n = 2^{n-1}$ auch im Zusammenhang mit der Schachbrett-Sage erreicht. Dort soll ja das erste Feld eines Schachbrettes mit einem Reiskorn, das zweite Feld mit zwei Reiskörnern, das dritte mit vier Körnern, das vierte mit acht Körnern usw. belegt werden – also genau gemäss obiger Folge.

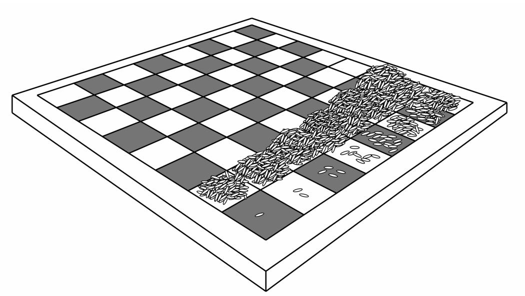


Abbildung 1: Reis auf Schachbrett

Das Beispiel demonstriert eindrücklich das ungeheure Wachstum einer Exponentialfunktion, denn es würde in der Tat alles Reis auf unserem Planeten nicht ausreichen, um das Brett in diesem Sinne mit Reis zu füllen.

Explizit oder rekursiv?

Wie gibt man eine Folge üblicherweise an? Eine erste (noch wenig befriedigende) Art besteht wie in den Beispielen a) - h) darin, die ersten paar Glieder aufzuzählen. Das eignet sich besonders dann, wenn man die Regel (noch) nicht weiss.

Wer die zugehörige Regel kennt, kann manchmal eine Formel für das n-te Glied angeben: $a_n = $ *Formel in n*. Dies nennt man dann die *explizite* Angabe einer Folge. Solche expliziten Formeln haben wir oben schon kennengelernt:

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$a_n = 4n + 3$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{n+1} & \text{, falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Oft ist die Regel so, dass man nicht direkt in der Lage ist, eine Formel für ein beliebiges Folgeglied zu nennen. Vielmehr kennen wir vielleicht eine Regel, die uns von einem Glied zum jeweils nächsten „trägt“. Dann kann man die Folge *rekursiv* angeben. Dazu muss man das erste Glied a_1 kennen sowie eine Regel, wie aus irgendeinem Glied auf das jeweils nächste geschlossen werden kann. Also:

$$a_1 = \ldots \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \textit{Formel in } a_n$$

Das wollen wir gleich anhand von zwei Beispielen illustrieren:

Angenommen, wir erhalten die folgende Information über eine bestimmte Folge:

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n, \qquad \forall n \geq 1.$$

Wir kennen also das erste Glied: 1. Falls wir aber etwa das 999. Glied bestimmen möchten, stehen wir vor dem Problem, dass die Formel nur diese Auskunft gibt:

$$a_{999} = 999 \cdot a_{998}.$$

Wir müssten also das 998. Glied kennen, um das 999. Glied zu bestimmen. Um aber das 998. Glied zu finden, müssen wir das 997. Glied kennen, denn nach derselben Formel gilt ja auch:

$$a_{998} = 998 \cdot a_{997}$$

und so weiter. Wir müssten also, wollten wir das 999. Glied bestimmen, „zurückrennen“ bis an den Anfang der Folge. „Zurückrennen“ heisst auf Lateinisch „recurrere“, und darum ist das auch eine *Rekursionsformel*. Sie sagt uns nur, wie man aus irgendeinem Glied auf das jeweils nächste schliessen kann, aber sie erlaubt uns nicht, direkt auf ein bestimmtes Glied zuzugreifen.

Es steht ausser Frage, dass uns eine explizite Formel lieber wäre als eine rekursive, aber manchmal ist es eben nicht einfach, eine solche zu finden. In diesem Beispiel immerhin ist es ganz einfach. Das merkt man, wenn man die ersten paar Glieder gemäss der Rekursionsformel erzeugt:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1$$

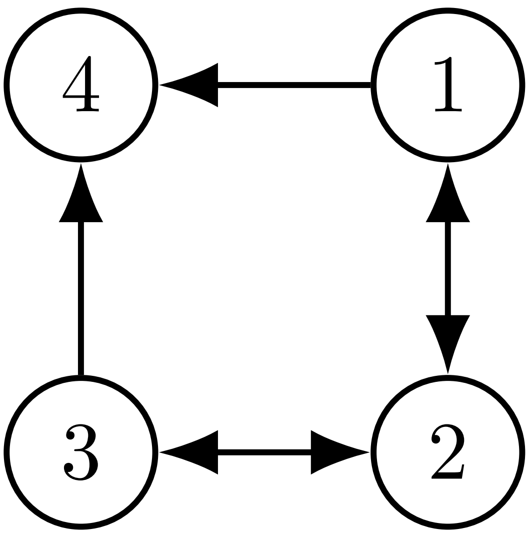
$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$a_3 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Offenbar liefert unsere Rekursionsformel einfach nur die Fakultät: $a_n = n!$.

Für unser zweites Beispiel denken wir uns, dass wir mit der kleinen Schwester ein Spiel namens „Hopse“ spielen. Wir haben vier Kreise in den Sand gemalt, Kreis 1 ist „Start“, Kreis 4 ist „Ziel“. Das Mädchen soll das Ziel mit einem Hüpfer erreichen, dann mit drei Hüpfern, dann mit fünf, dann mit sieben, usw. Dabei darf sie gemäss Pfeilrichtung in benachbarte Kreise beliebig hüpfen, im Zielkreis ist jedoch stets

Schluss. Wir zählen, wie viele Möglichkeiten sie jeweils hat: Für drei Hüpfer gibt es z.B. zwei Möglichkeiten (1-2-1-Ziel und 1-2-3-Ziel), für fünf Hüpfer gibt es vier Möglichkeiten. Wie viele Möglichkeiten gibt es für elf Hüpfer? Sei H_n die Anzahl Möglichkeiten bei n Hüpfern. Finden wir eine Formel für (H_n)?



Nun, zunächst ist klar, dass $H_n = 0$ sein muss für alle geraden Zahlen n. Denken wir uns also nun eine ungerade Zahl n: Wenn wir nach genau $n \geq 3$ Hüpfern auf Feld 4 ankommen sollen, müssen wir zwingend nach $n-2$ Hüpfern auf Feld 2 sein. Von dort aus haben wir genau zwei Möglichkeiten, das Ziel in zwei weiteren Schritten zu erreichen, nämlich via Feld 1 oder via Feld 3. Für ein ungerades n gilt daher:

$$H_n = 2 \cdot H_{n-2}.$$

Zusammen mit der Information $H_1 = 1$ und $H_3 = 2$ haben wir somit eine Rekursionsformel:

$$H_1 = 1$$

$$H_3 = 2$$

$$H_n = \begin{cases} 2 \cdot H_{n-2} & \text{falls } n \geq 3 \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Auch in diesem Fall haben wir Glück, weil es ziemlich einfach ist, eine explizite Formel anzugeben:

$$H_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{falls } n \geq 1 \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Ein weiteres schönes Beispiel einer rekursiven Folge ist etwa im Lucas-Lehmer-Test enthalten. Riesige Primzahlen, von denen man ab und zu im Zusammenhang mit Primzahlrekorden hört, sind oftmals von der Form $2^n - 1$. Wie kann man effizient testen, ob eine solche Zahl prim ist oder nicht?

Dazu benutzt man meist den folgenden Satz von F. Lucas (1842 - 1891) und D. N. Lehmer (1867 - 1938):

Satz:
Sei $p > 2$ eine Primzahl. Dann gilt:

$$2^p - 1 \text{ ist prim} \quad \Leftrightarrow \quad 2^p - 1 \big| S_{p-1},$$

wobei die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ rekursiv so definiert ist: $S_1 := 4$ und $S_{n+1} := S_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Mathematik in Reimen

Friedrich Wille veröffentlichte in seinem wunderschönen Buch „Humor in der Mathematik“ folgendes Gedicht über Folgen:

Will man Mathematik betreiben,
muss man gelegentlich was schreiben;
wir schreiben daher zu Beginn
uns eine paar schlichte Zahlen hin:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Wie rechts es immer weiter geht,
sich sicherlich von selbst versteht:
Ein Sechstel steht an sechster Stell,
an siebter dann ein Siebentel,
und was nun niemand mehr verwundert:
ein Hundertstel steht an Platz hundert.
Kurzum, an n-ter Position,
das wissen wir jetzt alle schon,
muss stets die Zahl ein n-tel steh'n,
Wie schön, wie schön, wie schön, wie schön.

Das, was soeben hier beschrieben,
wo ihr gefolgt seid mir, ihr Lieben,
wird eine *Folge* kurz genannt,
von Bayern bis zur Waterkant.

Auch bei den nächsten Folgen hier
reicht wieder rechts nicht das Papier:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

$$1, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{7}, 1, \ldots$$

(Man füg an jeder, wenn man kann,
zum Spass sechs weit're Zahlen an.)
Ganz allgemein schreibt Folgen man
in folgender Gestalt gern an:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

wobei man gleich Papier einspart.
Die Folgen (1) bis (4) erhalten
auf diese Weise die Gestalten:

$$\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{2^n}\right), (2n), ((-1)^n),$$

derweil die fünfte Folge man
z.B. so beschreiben kann:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{n}{n+1} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wie ich eine Folge mal'
ist letzten Endes ganz egal,
sofern man nur dabei begreift,
wie diese läuft und läuft und läuft,
d.h. wie jedem n dabei
ein a_n zugeordnet sei.
Das n durchläuft vergnügt und heiter
dabei die ganze Zahlenleiter
$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ und so weiter,
Nun sind wir schon ein Stück gescheiter.

Reihen

Was ist eine Reihe?

Betrachten wir etwa die Folge $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ gemäss der expliziten Formel $a_n = 2n - 1$. Die Reihe zu dieser Folge entsteht dadurch, dass man die Glieder der Folge schrittweise aufaddiert. So wäre etwa 1 das erste Glied der Reihe, $1 + 3 = 4$ das zweite Glied der Reihe, $1 + 3 + 5 = 9$ das dritte Glied der Reihe und so weiter. Bezeichnen wir die Glieder der Reihe mit $s_1, s_2, s_3, \ldots$, so wäre also

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + 3 \\ s_3 &= 1 + 3 + 5 \\ s_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Definition:
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ eine beliebige Folge. Die zugehörige ***Reihe*** *ist die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$*

wobei

$$s_1 := a_1$$
$$s_2 := a_1 + a_2$$
$$s_3 := a_1 + a_2 + a_3$$
$$\dots$$
$$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$\dots$$

*Den Term s_n nennt man auch **n-te Partialsumme**. Offenbar ist eine Reihe immer auch eine Folge, nämlich die Folge der Partialsummen der zugrundeliegenden Folge.*

Arithmetische Folgen und Reihen

Der wohl einfachste Typ einer Folge ist die sogenannte *arithmetische* Folge. Bei einer solchen ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder immer konstant. Genauer:

Definition:
*Gilt für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, dass $d := a_{n+1} - a_n$ konstant ist für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so heisst die Folge **arithmetisch**, und d heisst **Differenz**.*

Unser Eingangsbeispiel g) war arithmetisch mit Differenz $d = 4$. Die Bezeichnung „arithmetisch“ kommt daher, dass bei einer solchen Folge jedes Glied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \left(= \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} \right).$$

Natürlich nennt man die Reihe einer solchen Folge *arithmetische Reihe*. Sowohl für die arithmetische Folge als auch ihre Reihe existieren ganz einfache Formeln: Kennt man etwa a_1 und d, so kann man damit jedes beliebige Glied berechnen. Um etwa das 17. Glied zu bestimmen, muss man die Differenz ja sechszehn Mal zum ersten Glied addieren. Allgemein: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Ebenso leicht kann man die n-te Partialsumme berechnen: Wegen

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

und auch

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1,$$

folgt durch Addition beider Gleichungen:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1).$$

Da aber jede Klammer den Wert $(a_1 + a_n)$ hat, folgt:

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Leftrightarrow \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Dahinter steckt die einfache und wohlbekannte Idee, dass man die n-te Partialsumme einer arithmetischen Folge am einfachsten so bildet, dass man zuerst das erste und letzte Glied, dann das zweite und zweitletzte Glied, dann das dritte und drittletzte Glied usw. addiert, weil man auf diese Weise immer gleich viel bekommt.

Merke:

Für eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit der Differenz d gilt:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

und

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

Ein ziemlich sensationelles Beispiel zu arithmetischen Folgen findet man in einem Satz, den Terence Tao und Ben Green im Jahr 2004 bewiesen haben: In der Abfolge aller Primzahlen existieren Ausschnitte arithmetischer Folgen von beliebiger Länge. Was heisst das genau? Nun, zum Beispiel ist $3, 5, 7$ ein Ausschnitt aus einer arithmetischen Folge mit Differenz 2. Diese Teilfolge besteht aus lauter Primzahlen und hat Länge 3.

Viel weniger offensichtlich: Die folgenden zehn Zahlen sind ebenfalls alle prim, und sie bilden einen Ausschnitt einer arithmetischen Folge mit Differenz 210: $199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089$. Das Sensationelle an dem Satz von Tao und Green ist nun, dass sie beweisen können, dass es *beliebig lange* Folgen von Primzahlen geben muss, die arithmetisch angeordnet sind. Die längste heute bekannte Folge besteht aus 26 Primzahlen.

Geometrische Folgen und Reihen

Während bei arithmetischen Folgen die Differenz aufeinanderfolgender Folgeglieder konstant ist, trifft dies bei den sogenannten geometrischen Folgen für den Quotienten zu. Genauer:

Definition:
Gilt für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$*, dass*

$$q := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

konstant ist $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$*, so heisst die Folge* ***geometrisch****, und* q *heisst* ***Quotient****.*

Unser Eingangsbeispiel f) ist offenbar geometrisch mit Quotienten $q = 2$. Ebenso bilden die einzelnen Tonfrequenzen einer chromatischen Tonleiter eine geometrische Folge. Der Name „geometrisch“ rührt daher, dass bei einer solchen Folge jedes Glied das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \left(= \sqrt{\frac{a_n}{q} \cdot a_n \cdot q} \right).$$

Es ist also q derjenige Faktor, den man anwenden muss, um von irgendeinem Glied der Folge zum jeweils nächsten zu gelangen. Auch hier können wir ganz einfache Formeln herleiten, die uns beim rechnerischen Umgang mit geometrischen Folgen und Reihen stark behilflich sind:

Angenommen, wir wissen, dass wir es mit einer geometrischen Folge zu tun haben und wir kennen das erste Glied a_1 und auch den Quotienten q. Wie können wir jedes beliebige Glied dieser Folge bestimmen? Nun, ganz einfach, zu dem n-ten Glied der Folge gelangt man natürlich, indem man zu a_1 genau $n-1$ mal den Quotienten multipliziert: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Und wie können wir die n-te Partialsumme einer geometrischen Folge berechnen? Aus

$$\begin{aligned} s_n =& a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ =& a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots \\ &+ a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned} \qquad (\star)$$

folgt durch Multiplikation mit q:

$$\begin{aligned} q \cdot s_n =& a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots \\ &+ a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \end{aligned} \qquad (\star\star)$$

Subtrahieren wir nun $(\star\star)$ von $(\star)$, so ergibt sich:

$$(1-q)\cdot s_n = a_1 - a_1\cdot q^n.$$

Für ein $q\neq 1$ können wir nach s_n auflösen und erhalten:

$$s_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Merke:

Für eine geometrische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit dem Quotienten q gilt:

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1}$$

Und, falls $q\neq 1$ ist:

$$s_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Die französische Gräfin Elisabeth-Angélique de Beautéville verwitwete im zarten Alter von 20 Jahren. Ihr Gatte hatte sie sehr geliebt und ihr folgendes Testament hinterlassen: Im ersten Jahr nach seinem Tod wird der Witwe 1 Goldstück ausbezahlt, und in jedem folgenden Jahr verdoppelt sich diese Summe, aber nur unter der Bedingung, dass die Gräfin nicht wieder heiratet. Die Gräfin wurde uralt; sie lebte noch 69 Jahre, ohne wieder zu heiraten. Wie viele Goldstücke hätte sie also insgesamt erhalten müssen? Und warum konnte das aber nicht klappen?

Nun, wenn diese Geschichte wahr wäre, dann hätte die Anzahl Goldstücke a_n, n Jahre nach dem Hinschied des geliebten Gatten, eine geometrische Folge mit $a_1=1$ und $q=2$ bilden müssen. Die 69. Partialsumme wäre dann

$$s_{69} = 1\cdot\frac{1-2^{69}}{1-2} = 2^{69}-1$$

Diese Summe hätte niemals aufgebracht werden können, und wenn der Verstorbene noch so reich gewesen wäre.

Wie viele Glieder der geometrischen Folge $1, \sqrt{2}, 2, \ldots$ müssen mindestens addiert werden, um die Summe 1000 zu übersteigen? Hier ist $q=\sqrt{2}$, und es ist gefragt, für welches n erstmals

$$1\cdot\frac{1-\sqrt{2}^n}{1-\sqrt{2}} > 1000$$

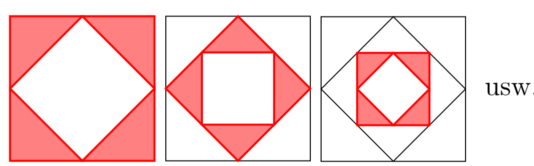
gilt? Löst man diese Ungleichung, so findet man $n=18$.

Beim Durchgang durch eine Glasplatte verliert ein Lichtstrahl durch Reflexion an den Grenzflächen und durch Inhomogenität des Materials ca. 12% seiner ursprünglichen Lichtstärke L_0. Welche Lichtstärke hat der Strahl nach Durchdringen von n solchen Glasplatten? Nun, wenn wir mit (L_n) die Folge der Lichtstärken nach Durchdringen von n Platten bezeichnen, dann liegt offenbar eine geometrische Folge mit Quotient $q=0.88$ vor. Es ist dann also

$$L_n = L_0\cdot 0.88^n.$$

Beachten Sie, dass der Exponent hier n und nicht $n-1$ heissen muss, da ein Verlust schon in der ersten Platte eintritt.

Betrachten wir zum Schluss die folgende Abbildung:



Welche Erkenntnis könnte hier bildlich dargestellt sein?

Es liegt nahe, die Inhalte der aufeinanderfolgenden gefärbten Gebiete als Folge zu betrachten. Nehmen wir vereinfachend an, die zugrundliegende Figur sei ein Quadrat mit Seitenlänge 1, und es bezeichne g_n den Inhalt des gefärbten Gebietes in der n-ten Abbildung. Dann ist g natürlich eine geometrische Folge mit $g_1 = 0.5$ und $q = 0.5$. Aufgrund unserer Überlegungen weiter oben können wir dann zum Beispiel den Inhalt des gefärbten Gebietes in der n-ten Abbildung berechnen:

$$g_n = 0.5 \cdot 0.5^{n-1} = 0.5^n.$$

Freilich können wir auch alle gefärbten Gebiete der ersten n Abbildungen „zusammenlegen“ und deren Gesamtfläche berechnen:

$$s_n = 0.5 \cdot \frac{1 - 0.5^n}{1 - 0.5} = 1 - 0.5^n.$$

Was fällt dabei auf? Offenbar - und das erschliesst sich ja auch unmittelbar aus den Abbildungen - ist eine solche Partialsumme nie gleich 1, sondern immer ein wenig kleiner. Es ist aber auch klar, dass s_n „von unten her gegen 1 hinstreben“ wird, wenn wir n immer grösser werden lassen, weil wir das Quadrat mehr und mehr ausschöpfen. Man könnte also salopp sagen, dass man exakt 1 erhält, wenn man alle unendlich vielen Glieder der Folge g aufaddiert:

$$\begin{aligned} & 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + 0.5^4 + \ldots = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{\infty} 0.5^i = 1. \end{aligned}$$

Es ist also tatsächlich so, dass man einen endlichen Gesamtwert bekommen kann, wenn man unendlich viele Glieder einer Folge aufsummiert - eine Situation, die durch Alltagserfahrungen eher nicht gestützt wird, die aber deswegen nicht weniger real ist.

Eigentlich sind wir damit mitten in sogenannten Grenzwertüberlegungen, einem Thema, dem der nächste Text in der Folge all dieser Texte gewidmet ist …