Logarithmen

Armin P. Barth

ETH zürich

Mit Logarithmen das Leben verlängern

Im Jahr 1614 hatte John Napier aus Edinburgh eine glänzende Idee. Er entwickelte ein Verfahren, mit dem die besonders zeitaufwändige Multiplikation respektive Division von Zahlen zurückgeführt werden kann auf eine viel einfachere und schnellere Addition respektive Subtraktion. Sind etwa die beiden positiven Zahlen a und b zu multiplizieren, so kann man jeden dieser Faktoren zur Basis 10 darstellen.

$$a = 10^x \qquad \text{und} \qquad b = 10^y$$

Die herfür nötigen Exponenten x und y existieren zweifellos immer, weil die zu multiplizierenden Zahlen positiv sind, und man nennt sie *Logarithmen*. Nun besagt ein Potenzgesetz, dass

$$a \cdot b = 10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$$

ist. Die Multiplikation der beiden Zahlen a und b kann also zurückgeführt werden auf die Addition ihrer Logarithmen. Dieses Verfahren ist freilich nur dann effizient, wenn einerseits der Logarithmus einer beliebigen (positiven) Zahl schnell gefunden und andererseits das Resultat einer Zehnerpotenz ebenso schnell bestimmt werden kann.

Hierfür entwickelten John Napier, Henry Briggs, der Schweizer Uhrenmacher Jost Bürgi und andere Logarithmustabellen, die zu jeder ganzen Zahl von 1 bis 100′000 den Logarithmus auf 14 Nachkommastellen enthielten. Zu jedem sogenannten *Numerus* a war der *Logarithmus* x tabelliert, für den $a = 10^x$ ist. Wenn nun die beiden Zahlen a und b zu multiplizieren sind, so kann man einfach ihre Logarithmen x und y in der Tabelle nachschlagen, diese dann addieren und schliesslich den Numerus zu $x + y$ ablesen, und schon war das Resultat der Multiplikation $a \cdot b$ gefunden:

> a hat Logarithmus x, also $a = 10^x$.
>
> b hat Logarithmus y, also $b = 10^y$.
>
> Summe der Logarithmen, $x + y$.
>
> $x + y$ hat den Numerus $a \cdot b$, weil $10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y = a \cdot b$ ist.

Diese Idee war so hilfreich, dass komplizierte Berechnungen, die damals nicht selten Tage oder Wochen dauerten, plötzlich in Stunden oder Tagen erledigt werden konnten. Diese Tatsache hat den französischen Mathematiker Pierre-Simon Laplace bewogen zu sagen, dass dank Logarithmen das Leben sozusagen verdoppelt werden könne.

Die 1624 publizierten Tabellen blieben unübertroffen bis ins 20. Jahrhundert, als zwischen 1924 und 1949, anlässlich der 300-Jahr-Feier der Erfindung der Logarithmen in England, neue Tabellen mit 20 Nachkommastellen berechnet wurden. Zu Ehren von Napier wurde eine der Universitäten in Edinburgh nach ihm benannt, die *Edinburgh-Napier-University*.

Es soll hier nicht verschwiegen werden, dass Napiers originale Idee keine algebraische war; die Algebra war damals noch zu wenig entwickelt. In heutiger Notation lässt sich sein Logarithmus, den wir hier mit Nap.log bezeichnen wollen, so ausdrücken:

$$\mathrm{Nap.}\log(a) = 10^7 \cdot \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{a}{10^7}\right)$$

Dabei steht auf der rechten Seite der Logarithmus zur Basis 1/e. Insbesondere hatte Napiers Logarithmus also nicht Basis 10, und der

Nap.log der Zahl 1 ist auch nicht 0; diese offensichtlichen Verbesserungen wurden erst vorgenommen, als Briggs in Schottland weilte und zusammen mit Napier eine verbesserte Version der ursprünglichen Idee entwickelte. Darum nennt man Logarithmen zur Basis 10 auch häufig *Briggssche Logarithmen*.

Definition

Es ist sehr wichtig, dass wir sehr genau lernen, wie Logarithmen definiert sind, denn davon hängt das Verständnis aller folgenden Überlegungen ab. Liegt irgendeine positive reelle Zahl a vor, so versteht man unter dem Zehnerlogarithmus oder Briggsschen Logarithmus von a denjenigen Exponenten x, für den $a = 10^x$ gilt. Und man notiert: $x = \log(a)$ oder auch $x = \lg(a)$.

Es werden heute aber längst nicht nur Logarithmen zur Basis 10 verwendet; theoretisch kann man die Zahl a ja auch zu jeder beliebigen anderen positiven Basis darstellen. Ist also $a = B^x$ für irgendeine Basis B, so nennt man x den *Logarithmus von a zur Basis B*. Und man notiert: $x = \log_B(a)$.

Sehr häufig werden heute neben der Basis 10 die Basen e (Eulersche Zahl) und 2 benutzt. Darum haben sich auch spezielle Bezeichnungen für Logarithmen zu diesen Basen durchgesetzt. Man schreibt nämlich $\ln(a)$ (logarithmus naturalis), wenn man die Zahl a zur Basis e darstellt und $\mathrm{lb}(a)$ (Binärlogarithmus), wenn man sie zur Basis 2 versteht.

Fassen wir zusammen:

Definition:
Sei $a \in \mathbb{R}^+$ beliebig, sei $B > 0$ eine beliebige Basis $\neq 1$.

*Der **Logarithmus von a zur Basis B** ist diejenige reelle Zahl x, für die gilt: $a = B^x$. In Zeichen: $x = \log_B(a)$*

*Wird speziell die Basis 10 gewählt, so schreibt man $\log(a)$ oder $\lg(a)$ oder auch $\log_{10}(a)$ und bezeichnet dies als **Zehnerlogarithmus**.*

*Wird speziell die Basis e gewählt, so schreibt man $\ln(a)$ oder auch $\log_{\mathrm{e}}(a)$ und bezeichnet dies als **natürlichen Logarithmus** oder **logarithmus naturalis**.*

*Wird speziell die Basis 2 gewählt, so schreibt man lb(a) oder auch log$_2(a)$ und bezeichnet dies als **Binärlogarithmus**.*

Einige Beispiele sollen das sogleich verdeutlichen: Die Tatsache, dass $10^2 = 100$ ist, zeigt, dass der Exponent 2 nötig ist, wenn die Zahl 100 als Potenz zur Basis 10 geschrieben werden soll. Folglich ist der Zehnerlogarithmus der Zahl 100 gleich 2: $\log(100) = 2$. Die Tatsache, dass $10^0 = 1$ ist, zeigt, dass der Exponent 0 nötig ist, wenn die Zahl 1 als Potenz zur Basis 10 geschrieben werden soll. Folglich ist der Zehnerlogarithmus der Zahl 1 gleich Null: $\log(1) = 0$. Überhaupt gilt natürlich für jede beliebige Basis $B \neq 0$, dass $B^0 = 1$ ist, und daher ist der Logarithmus von 1 bezüglich jeder beliebigen Basis gleich Null: $\log_B(1) = 0$.

Merke:

Für jede beliebige Basis $B \neq 0$ ist $\log_B(1) = 0$.

Die Tatsache, dass $0.5 = 2^{-1}$ ist, zeigt, dass der Exponent -1 nötig ist, wenn wir die Zahl 0.5 zur Basis 2 darstellen wollen. Folglich ist $\mathrm{lb}(0.5) = -1$. Die Tatsache, dass in guter Näherung $\mathrm{e}^{3.8} = 44.7$ ist, zeigt, dass der Exponent 3.8 nötig ist, wenn die Zahl 44.7 als Potenz zur Basis e dargestellt werden soll. Folglich ist in guter Näherung $\ln(44.7) = 3.8$.

Es fällt auf, dass man Logarithmen genau dann gut verstehen kann, wenn man alles über Potenzen und Wurzeln Gelernte sehr gut präsent hat. Wir haben es hier also mit der für die Mathematik typischen Situation zu tun, dass neue Gebiete oftmals das gesamte in früheren Gebieten erarbeitete Wissen voraussetzen.

Nur positive Zahlen besitzen Logarithmen

Was ist $\log(-5)$? Diese Frage verlangt nach etwas Unmöglichem. Es wird ja unterstellt, dass es möglich sei, die Zahl -5 als Potenz zur Basis 10 zu schreiben, aber eben dies geht natürlich nicht. Wir haben früher bei der Untersuchung der Exponentialfunktionen gelernt, dass die Funktion $x \mapsto 10^x$ ausschliesslich positive Funktionswerte aufweist. Insbesondere versagt die naive Idee, man könnte es vielleicht mit negativen Exponenten versuchen: Es ist ja zum Beispiel

$$\begin{aligned}
10^{-0.3} &= \frac{1}{10^{0.3}} = 0.501\ldots \\
10^{-1} &= \frac{1}{10} = 0.1 \\
10^{-2} &= \frac{1}{10^2} = 0.01 \\
10^{-5} &= \frac{1}{10^5} = 0.00001
\end{aligned}$$

und so weiter. Negative Exponenten mit wachsendem Betrag erzeugen also immer kleiner werdende positive, niemals aber negative Zahlen. Dasselbe lässt sich natürlich auch über die Basen 2 und e und alle anderen Basen > 1 sagen.

Merke:

$\log_B(a)$ existiert nur für positive, reelle Zahlen a.

Triviale Identitäten

Der Term $\log(123.45)$ bezeichnet bekanntlich denjenigen Exponenten, der benötigt wird, wenn die Zahl 123.45 als Potenz zur Basis 10 geschrieben werden soll. Einerlei, ob wir diesen Logarithmuswert kennen oder nicht, können wir mit Sicherheit feststellen, dass $10^{\log(123.45)} = 123.45$ ist. Daran ist nichts geheimnisvoll; es drückt lediglich die Definition des Zehnerlogarithmus aus. Der Term $\ln(10)$ bezeichnet denjenigen Exponenten, der benötigt wird, wenn die Zahl 10 als Potenz zur Basis e geschrieben werden soll. Einerlei, ob wir diesen Logarithmuswert kennen oder nicht, können wir sicherlich feststellen, dass $\mathrm{e}^{\ln(10)} = 10$ ist. Auch dies ist nicht geheimnisvoll, sondern gibt lediglich die Definition des Logarithmus wieder. Allgemein gilt also für eine beliebige positive reelle Zahl a, dass folgendes gilt:

Triviale Identitäten (I)

$$\begin{aligned}
10^{\log(a)} &= a \\
\mathrm{e}^{\ln(a)} &= a \\
2^{\mathrm{lb}(a)} &= a \\
B^{\log_B(a)} &= a
\end{aligned}$$

Erst dann, wenn man diese Identitäten als trivial erkennt, erkennt man sie richtig, denn erst dann hat man wirklich verstanden, wie ein Logarithmus definiert ist.

Was ist $\log\left(10^{4.17}\right)$? Auch diese Frage kann als trivial erkannt werden, wenn wir uns nur genau vor Augen führen, wie der Zehnerlogarithmus definiert ist: $\log(a)$ sucht nach demjenigen Exponenten, der benötigt wird, wenn die Zahl a als Potenz zur Basis 10 geschrieben werden soll. In diesem Fall ist $10^{4.17}$, was bedeutet, dass wir den Exponenten nicht mehr suchen müssen; er steht nämlich bereits da: 4.17 ist offenbar der Exponent, der benötigt wird, wenn die Zahl $a = 10^{4.17}$ zur Basis 10 geschrieben werden soll. Also ist natürlich $\log\left(10^{4.17}\right) = 4.17$. Daran ist nichts verwirrend.

Allgemein merken wir uns nun auch die folgenden trivialen Identitäten:

Triviale Identitäten (II)

$$\begin{aligned} \log\left(10^x\right) &= x \\ \ln\left(\mathrm{e}^x\right) &= x \\ \mathrm{lb}\left(2^x\right) &= x \\ \log_B\left(B^x\right) &= x. \end{aligned}$$

Ein Logarithmusgesetz

Der rechnerische Umgang mit Logarithmen wird stark erleichtert durch die sogenannten Logarithmusgesetze. Dies sind aber eigentlich keine neuen Gesetze; wir kennen sie nämlich bereits als Potenzgesetze, nur kommen sie jetzt in einem anderen Gewand daher. Sie kleiden sich so, dass sie etwas Wesentliches über Logarithmen, also über Exponenten aussagen. Eines der Potenzgesetze besagt bekanntlich, dass bei der Multiplikation zweier Potenzen zur gleichen Basis die beiden Exponenten addiert werden können. Angewandt auf Basis 10 heisst das:

$$10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$$

Wie können wir diesen Sachverhalt so umformulieren, dass eine Aussage über Logarithmen entsteht? Ganz einfach: Wir nennen die beiden Faktoren der linken Seite a respektive b; dann ist natürlich $x = \log(a)$ und $y = \log(b)$, und auf beiden Seiten der Gleichung steht das Produkt $a \cdot b$. Die Tatsache, dass die rechte Seite den Exponenten $x + y$ zeigt, bedeutet dann, dass zur Darstellung von $a \cdot b$ als Zehnerpotenz der Exponent $x+y$ nötig ist, dass also $\log(a \cdot b) = x+y$ ist. Folglich ist

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b).$$

Die Tatsache, dass der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der beiden Faktoren ist, sollte uns ebenso wenig überraschen wie die Tatsache, dass bei der Multiplikation zweier Potenzen mit gleichen Basen die beiden Exponenten addiert werden können. In beiden Fällen handelt es sich um denselben Sachverhalt. In beiden Fällen geht es darum einzusehen, wie sich zwei Zahlen verhalten, wenn man sie multipliziert und dabei zur gleichen Basis darstellt. Wenn wir sehen, dass die Logarithmusgesetze nur umformulierte Potenzgesetze sind, dann sehen wir sie richtig.

Das eben erarbeitete Logarithmusgesetz gilt selbstverständlich für jede beliebige zugelassene Basis. Es gilt also:

Satz: (Logarithmusgesetz I)
Ist B eine beliebige Basis ($B > 0$ und $B \neq 1$) und sind $a, b > 0$, so gilt:

$$\log_B(a \cdot b) = \log_B(a) + \log_B(b).$$

Beweis. Wegen $a, b > 0$ können wir die beiden Zahlen als Potenzen zur Basis B schreiben:

$$a = B^x \qquad \text{und} \qquad b = B^y.$$

Durch Logarithmen ausgedrückt bedeutet das:

$$x = \log_B(a) \qquad \text{und} \qquad y = \log_B(b).$$

Nun ist wegen eines Potenzgesetzes

$$\begin{aligned}\log_B(a \cdot b) &= \log_B\left(B^x \cdot B^y\right)\\ &= \log_B(B^{x+y})\\ &= x + y\\ &= \log_B(a) + \log_B(b).\end{aligned}$$

□

Wendet man diese Regel iterativ an, so kann man natürlich auch ein Produkt aus mehr als einem Faktor entsprechend aufspalten:

Satz: (Logarithmusgesetz I, verallgemeinert)
Ist B eine beliebige Basis ($B > 0$ und $B \neq 1$) und sind $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned}&\log_B(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) =\\ &\log_B(a_1) + \log_B(a_2) + \ldots + \log_(a_n).\end{aligned}$$

Angenommen, wir möchten in Erfahrung bringen, wie viele Stellen die riesige Zahl 100! (Fakultät von 100) hat. Da die Stellenzahl natürlich aus dem Exponenten zur Basis 10, also aus dem Zehnerlogarithmus, ableitbar ist, müssen wir den Term

$$\log(100!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100)$$

berechnen. Das ist schwierig, weil 100! so riesig ist; aber glücklicherweise ermöglicht uns unser Logarithmusgesetz, dass wir die Produktbildung umgehen: Es ist ja

$$\begin{aligned}&\log(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100) =\\ &\underbrace{\log(1)}_{=0} + \log(2) + \ldots + \underbrace{\log(100)}_{=2}\end{aligned}$$

und damit sind wir in der viel angenehmeren Situation, bloss eine Summe aus kleinen Zahlen bilden zu müssen.

Noch mehr nützliche Logarithmusgesetze

Ein weiteres Potenzgesetz besagt, dass bei der Division zweier Potenzen mit gleichen Basen die Exponenten subtrahiert werden können, genauer:

$$\frac{B^x}{B^y} = B^{x-y}.$$

Daraus lässt sich in analoger Weise ein weiteres Logarithmusgesetz gewinnen:

Satz: (Logarithmusgesetz II)
Ist B eine beliebige Basis ($B > 0$ und $B \neq 1$) und sind $a, b > 0$, so gilt:

$$\log_B\left(\frac{a}{b}\right) = \log_B(a) - \log_B(b).$$

Ein drittes Potenzgesetz besagt, dass bei der Potenzierung einer Potenz die beiden Exponenten multipliziert werden können, genauer:

$$(B^x)^r = B^{x \cdot r}.$$

Wie können wir daraus ein entsprechendes Logarithmusgesetz gewinnen? Dazu setzen wir zunächst $a := B^x$; das ist äquivalent zu $x = \log_B(a)$. Die linke Seite zeigt nun eine Potenz von a, und die rechte Seite sagt etwas darüber aus, wie gross der Logarithmus dieser Potenz ist: Offenbar ist der Logarithmus der Potenz a^r gleich $x \cdot r$, das heisst, wir erhalten den Logarithmus der Potenz a^r, indem wir x, den Logarithmus von a selbst, mit r multiplizieren:

$$\log_B(a^r) = r \cdot \log_B(a).$$

Prägen wir uns auch dieses dritte Logarithmusgesetz gut ein:

Satz: (Logarithmusgesetz III)
Ist B eine beliebige Basis ($B > 0$ und $B \neq 1$) und sind $a > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt:

$$\log_B(a^r) = r \cdot \log_B(a).$$

Wollen wir zum Beispiel den Zehnerlogarithmus der riesigen Zahl $2^{10'000}$ berechnen und unser Taschenrechner weigert sich standhaft, das Resultat von $2^{10'000}$ anzuzeigen, so bedenken wir einfach, dass

$$\log\left(2^{10'000}\right) = 10'000 \cdot \log(2)$$

ist; damit stehen wir vor der viel einfacheren Aufgabe, die sehr kleine Zahl $\log(2)$ mit $10'000$ zu multiplizieren. Einer der zahlreichen positiven Aspekte der Logarithmen ist in der Tat, dass sie riesige Zahlen zähmen können.

Nussknacker für Exponentialgleichungen

Das dritte Logarithmusgesetz ist von unschätzbarem Wert, wenn es darum geht, Exponentialgleichungen zu lösen. Wir haben früher erlebt, dass uns das Lösen solcher Gleichungen sehr schwer fällt. Bei

$$2^{x-1} = 0.5^{3x}$$

haben wir noch Glück, weil es leicht möglich ist, auf beiden Seiten dieselbe Basis, nämlich 2, herzustellen:

$$2^{x-1} = \left(2^{-1}\right)^{3x} = 2^{-3x}$$

Jetzt können wir durch Exponentenvergleich nach der Variablen auflösen. Freilich funktioniert diese Methode nur in seltenen Fällen; ersetzen wir rechts etwa 0.5 durch 0.51, so versagt diese Vorgehensweise bereits kläglich. Es ist daher sehr erwünscht, dass wir eine Methode entwickeln, mit der man auch in einem solchen Fall vorankommt. Und genau hierbei hilft das dritte Logarithmusgesetz.

Betrachten wir zuerst ein weniger überladenes Beispiel:

$$2^x = 3.$$

Wenn - wie hier - zwei positive Zahlen gleich sind, so sind zweifellos auch ihre Logarithmen gleich. Wir können also schliessen, dass

$$\log(2^x) = \log(3),$$

wobei wir freilich auch andere Basen als 10 hätten wählen können. Nach dem dritten Logarithmusgesetz ist nun

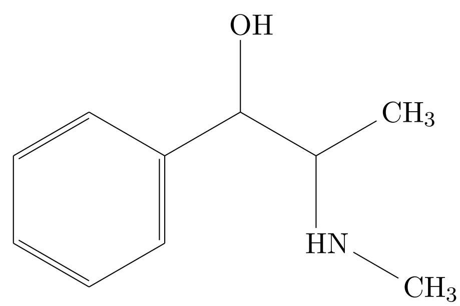
$$x \cdot \log(2) = \log(3)$$

und somit
$$x = \frac{\log(3)}{\log(2)}.$$
Hätten wir statt den Zehnerlogarithmus den Binärlogarithmus benutzt, hätte sich
$$x \cdot \mathrm{lb}(2) = \mathrm{lb}(3)$$
und somit
$$x = \mathrm{lb}(3)$$
ergeben, was den Vorteil einer knapperen Notation hätte. In jedem Fall versetzt uns das dritte Logarithmusgesetz in die Lage, bei Gleichungen dieser Art durch formales Umformen einen exakten Lösungsterm für die Variable zu gewinnen.

Betrachten wir auch noch das oben erwähnte Beispiel
$$2^{x-1} = 0.51^{3x}.$$
Wiederum können wir festhalten, dass die Logarithmen der beiden Terme gleich sein müssen. Diesmal wählen wir gleich den Binärlogarithmus, weil eine der Basen 2 ist:
$$\mathrm{lb}\left(2^{x-1}\right) = \mathrm{lb}\left(0.51^{3x}\right).$$
Das dritte Logarithmusgesetz erlaubt uns, die Exponenten vor den Logarithmus zu „ziehen“:
$$(x-1) \cdot \underbrace{\mathrm{lb}(2)}_{=1} = 3x \cdot \mathrm{lb}(0.51).$$
Dies ist eine lineare Gleichung in x und kann leicht aufgelöst werden:
$$\begin{aligned} & x - 1 = 3x \cdot \mathrm{lb}(0.51) \\ \Leftrightarrow \quad & x - 3x \cdot \mathrm{lb}(0.51) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \cdot (1 - 3 \cdot \mathrm{lb}(0.51)) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{1 - 3 \cdot \mathrm{lb}(0.51)}. \end{aligned}$$
Man kann mit gutem Recht sagen, dass mit dem Logarithmusgesetz III eine Art Nussknacker vorliegt, welcher schwierige Exponentialgleichungen aufzuknacken erlaubt.

Dopingkontrolle mit Logarithmen

Ephedrin ist ein sogenanntes *Sympathomimetikum*, also ein Medikament, welches stimulierend auf den Sympathikus, einen Anteil des vegetativen Nervensystems, wirkt. Damit sorgt es für eine allgemeine Leistungssteigerung und wird darum gerne als Dopingmittel verwendet. Das Internationale Olympische Komitee hat im Jahr 2000 eine Änderung der Dopingdefinition vorgenommen und darauf hingewiesen, dass an den Olympischen Spielen in Sydney erstmals die Nachweisgrenzen gewisser Dopingmittel geändert werden, für Ephedrin beispielsweise auf 10μg/ml. (Ein μg, ein Mikrogramm, ist der millionste Teil eines Gramms, also 10^{-6}g.)



Ephedrin

Nehmen wir nun an, ein Athlet erhält eine Dosis Ephedrin, durch welche sich kurz nach der Einnahme eine Konzentration von $10^{-4.5}\mu$g/ml im Blut aufbaut. Wenn der Abbau von Ephedrin im Körper eine Halbwertszeit von 5 Stunden hat, wie lange dauert es dann, bis ein Dopingtest das Präparat nicht mehr nachweist?

Wir können für die Ephedrin-Konzentration im Blut leicht eine Exponentialfunktion aufstellen:
$$C(t) = 10^{-4.5} \cdot 0.5^{\frac{t}{5}},$$
wobei die Zeit in Stunden gemessen wird. Nun

ist die Frage, nach wie vielen Stunden diese Konzentration auf ein Mikrogramm pro Milliliter gesunken sein wird. Wir setzen also die folgende Gleichung an:

$$10^{-4.5} \cdot 0.5^{\frac{t}{5}} = 10^{-6}$$

Dank den Logarithmusgesetzen fällt uns die Auflösung nun leicht:

$$\begin{aligned} & & 0.5^{\frac{t}{5}} &= 10^{-1.5} \\ \Leftrightarrow & & \log\left(0.5^{\frac{t}{5}}\right) &= \log\left(10^{-1.5}\right) \\ \Leftrightarrow & & \frac{t}{5} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) &= -1.5 \\ \Leftrightarrow & & \frac{t}{5} \cdot \left(\underbrace{\log(1)}_{=0} - \log(2)\right) &= -1.5 \\ \Leftrightarrow & & t &= \frac{7.5}{\log(2)}, \end{aligned}$$

was ungefähr 25 Stunden entspricht. Nach etwa 5 Halbwertszeiten wird der Wirkstoff also praktisch nicht mehr nachweisbar sein.

Zwei Spezialfälle

Es gibt zwei Spezialfälle des dritten Logarithmusgesetzes, welche man häufig antrifft. Bildet man erstens den Logarithmus eines Bruches mit Zähler 1, so ergibt sich:

$$\log_B\left(\frac{1}{a}\right) = \log_B\left(a^{-1}\right) = -1 \cdot \log_B(a).$$

Bildet man zweitens den Logarithmus einer Wurzel, so ergibt sich:

$$\log_B\left(\sqrt[n]{a}\right) = \log_B\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_B(a).$$

MERKE:

Für $a > 0$ gilt:

$$\log_B\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_B(a)$$
$$\log_B\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_B(a).$$

Basisumrechnung

Angenommen, uns liegt ein Logarithmus zu einer unbequemen Basis vor, einer Basis also, mit der wir lieber nicht rechnen möchten, weil vielleicht unser Taschenrechner sie nicht anbietet. Es könnte sich beispielsweise um $\log_7(5)$ handeln. Wir sind also daran interessiert, diesen Logarithmus durch einen Logarithmus mit bequemer Basis, etwa Basis 10, auszudrücken. Auch hierbei helfen uns die Logarithmusgesetze tatkräftig: Kürzen wir obigen Logarithmus etwa durch x ab, also

$$x := \log_7(5),$$

so folgt sofort $7^x = 5$. Logarithmieren wir diese Gleichung nun zur bequemen Basis 10, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & & \log\left(7^x\right) &= \log(5) \\ \Leftrightarrow & & x \cdot \log(7) &= \log(5) \\ \Leftrightarrow & & x &= \frac{\log(5)}{\log(7)}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $\log_7(5) = \frac{\log(5)}{\log(7)}$.

Wir hätten freilich auch eine andere bequeme Basis wählen können, etwa 2 oder e. Dann hätten wir auf analoge Weise gefunden, dass

$$\log_7(5) = \frac{\log(5)}{\log(7)} = \frac{\mathrm{lb}(5)}{\mathrm{lb}(7)} = \frac{\ln(5)}{\ln(7)} = \ldots$$

Diese Überlegung lässt sich leicht verallgemeinern: Bezeichnet U irgendeine unbequeme Basis ($U > 0$, $U \neq 1$) und möchten wir den Term $\log_U(a)$ lieber durch eine bequeme Basis B ausdrücken, so setzen wir einfach

$$x := \log_U(a),$$

was äquivalent ist zu

$$U^x = a,$$

und logarithmieren diese Gleichung zur Basis B:

$$\begin{aligned} & \log_B\left(U^x\right) = \log_B(a) \\ \Leftrightarrow \quad & x \cdot \log_B(U) = \log_B(a) \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{\log_B(a)}{\log_B(U)}. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

Der Logarithmus einer Zahl zu einer unbequemen Basis ist gleich dem Logarithmus dieser Zahl zur bequemen Basis, dividiert durch den Logarithmus der unbequemen Basis.

Basisumrechnung

$$\begin{aligned} \log_U(a) &= \frac{\log(a)}{\log(U)} \\ &= \frac{\mathrm{lb}(a)}{\mathrm{lb}(U)} \\ &= \frac{\ln(a)}{\ln(U)} \\ &= \ldots \\ &= \frac{\log_B(a)}{\log_B(U)} \end{aligned}$$

Der Graph der Logarithmusfunktion

Nun, da wir gut verstanden haben, was ein Logarithmus ist, können wir dieses Wissen leicht auch graphisch repräsentieren. Nehmen wir uns zum Beispiel vor, den Graphen der Funktion $x \mapsto \log_2(x)$ zu erzeugen. Welche Graphenform ergibt sich? Welche Eigenschaften charakterisieren den Graphen?

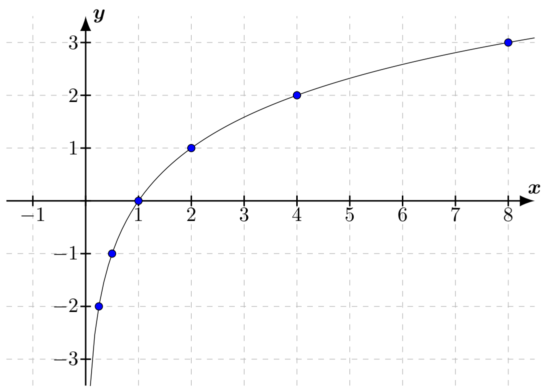
Zunächst bemerken wir, dass ein Binärlogarithmus *nur für positive reelle Zahlen* existiert; wir können und müssen also $x = 0$ sowie negative x-Werte ignorieren. Wir wissen weiter, dass $\log_2(1) = 0$ ist, so dass der Graph also eine *Nullstelle* bei $x = 1$ aufweisen muss. Zudem ist der Graph *streng monoton wachsend*, weil grösser werdende x-Werte natürlich auch höhere Exponenten zur Basis 2 nach sich ziehen: Um zum Beispiel das Ergebnis 100 zu erhalten, brauchen wir natürlich einen höheren Exponenten zur Basis 2, als wenn wir nur das Ergebnis 20 erreichen wollen.

Gewisse Funktionswerte sind auch ohne Zuhilfenahme von Technologie leicht zu ermitteln, wie etwa:

$$\begin{aligned} \log_2(0.25) &= -2 \\ \log_2(0.5) &= -1 \\ \log_2(1) &= 0 \\ \log_2(2) &= 1 \\ \log_2(4) &= 2 \\ \log_2(8) &= 3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Dabei wird der Graph nach rechts hin *beliebig hohe y-Werte* erreichen, auch wenn seine Steigung laufend abnimmt. Und wenn x sich von rechts der Stelle 0 nähert, strebt $\log_2(x)$

gegen $-\infty$; die y-Achse ist also eine *vertikale Asymptote* an den Graphen.



Und was, wenn sich die Basis ändert?

Für jede beliebige positive Basis B gilt: $B^0 = 1 \Leftrightarrow \log_B(1) = 0$; dahe hat der Graph jeder Logarithmusfunktion eine Nullstelle bei $x = 1$. Ist zudem $B > 1$, so steigt der Graph natürlich auch streng monoton an, verläuft insgesamt also sehr ähnlich wie der abgebildete Graph des Binärlogarithmus. Allerdings werden, um ein bestimmtes Ergebnis zu erreichen, natürlich immer kleinere Exponenten benötigt, wenn die Basis ansteigt. Um beispielsweise das Ergebnis 10 zu erreichen, benötigen wir bei Basis 2 etwa den Exponenten 3.32, bei Basis e aber nur den Exponenten 2.30 und bei Basis 10 sogar nur den Exponenten 1.

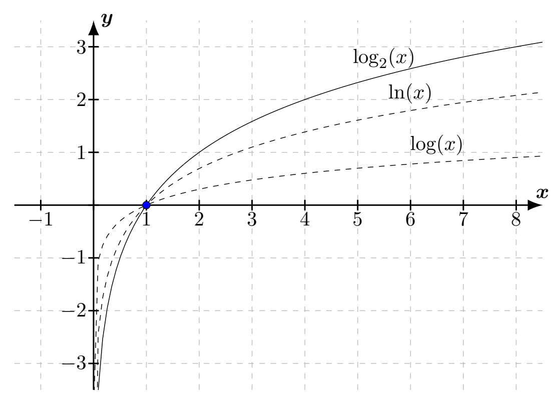
Das bedeutet: Je grösser die Basis ist, desto langsamer wird der Graph der Logarithmusfunktion nach der Stelle $x = 1$ ansteigen.

Was aber lässt sich über die gegenseitige Lage mehrerer Logarithmusfunktionen für $0 < x < 1$ sagen?

Betrachten wir etwa die Stelle $x = 0.5$. Bestimmt man den Logarithmus von 0.5 bezüglich verschiedener Basen, so beobachtet man Folgendes:

$$\begin{aligned} 0.5 &= 2^{-1}, & &\text{also} & \log_2(0.5) &= -1, \\ 0.5 &= \mathrm{e}^{-0.693\ldots}, & &\text{also} & \ln(0.5) &= -0.693\ldots, \\ 0.5 &= 10^{-0.301\ldots}, & &\text{also} & \log(0.5) &= -0.301\ldots \end{aligned}$$

Also: Je grösser die Basis ist, desto grösser (!) ist der Logarithmus von 0.5, freilich immer im negativen Bereich. Im Intervall $]0,1[$ verläuft also eine erste Logarithmusfunktion oberhalb einer zweiten, wenn die Basis der ersten grösser ist als die Basis der zweiten.



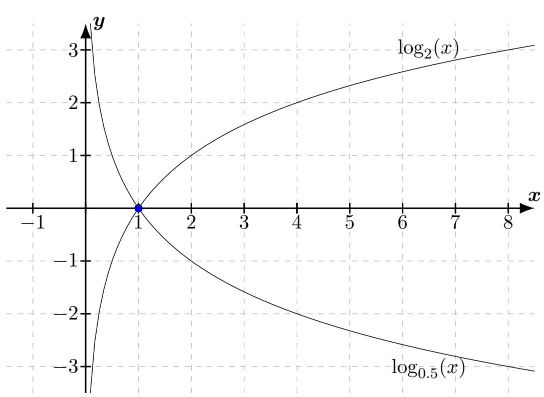
Nun kann, wenn auch eher selten, die Basis natürlich auch kleiner als 1 sein. Betrachten wir zum Beispiel den Fall $B = 0.5$. Angenommen, wir möchten den Logarithmus einer positiven Zahl x bezüglich dieser Basis bestimmen. Dann suchen wir also den Exponenten, mit dem man 0.5 potenzieren muss, um x zu erhalten:

$$x = 0.5^{\boxed{?}}.$$

Vergleichen wir diese Frage mit der Frage, welcher Exponent zur Basis 2 nötig wäre, um x zu erhalten, so wird Folgendes klar:

$$x = 0.5^{\boxed{?}} = \left(2^{-1}\right)^{\boxed{?}} = 2^{-\boxed{?}}$$
$$x = 2^{\boxed{?}}.$$

Wenn $2^{-\boxed{?}}$ und $2^{\boxed{?}}$ dasselbe ergeben sollen, müssen der Logarithmus bezüglich Basis 0.5 und der Logarithmus bezüglich Basis 2 betragsmässig gleich, jedoch unterschiedlich im Vorzeichen sein. Anders gesagt: Bezüglich Basis 0.5 benötigen wir das Negative dessen, was wir bezüglich Basis 2 benötigen. Das bedeutet natürlich, dass der Graph der Logarithmusfunktion mit Basis 0.5 spiegelbildlich zum Graphen der Logarithmusfunktion mit Basis 2 bezüglich der x-Achse liegen muss. Insbesondere ist der Graph von $\log_{0.5}(x)$ streng monoton fallend.



Und allgemein?

Über den Graphen einer beliebigen Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_B(x)$ mit $B > 0$ und $B \neq 1$ wissen wir nun also Folgendes:

Der Graph

besitzt eine Nullstelle bei $x = 1$,

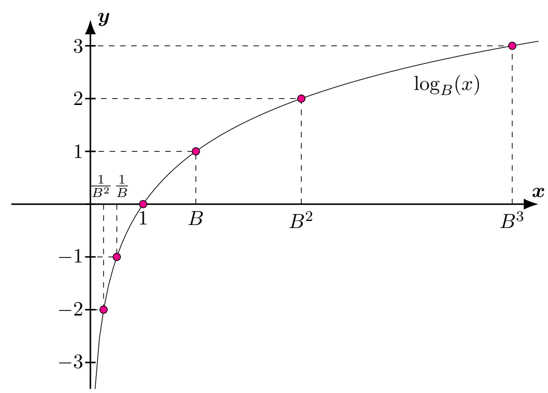
ist streng monoton wachsend für $B > 1$,

ist streng monoton fallend für $0 < B < 1$,

hat die y-Achse als vertikale Asymptote,

verläuft durch die Punkte

$(B^{-2}, -2)$,
$(B^{-1}, -1)$,
$(1, 0)$,
$(B, 1)$,
$(B^2, 2)$,
$(B^3, 3)$,
$\ldots$



Funktion und Umkehrfunktion

Um es kurz und bündig zu sagen: Die Logarithmusfunktionen sind bijektiv und besitzen folglich Umkehrfunktionen. Die Umkehrfunktionen sind gerade die Exponentialfunktionen. Wir können das hier neu Gelernte also auf vorteilhafte Weise mit früher Erarbeitetem verbinden. Was heisst es genau, dass Exponential- und Logarithmusfunktionen Umkehrfunktionen voneinander sind? Wie können wir das vertieft verstehen?

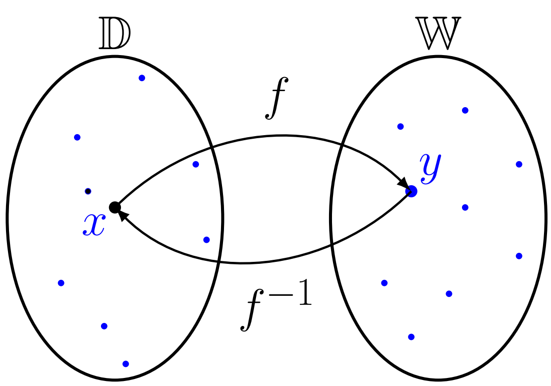
Was sind schon wieder die charakteristischen Eigenschaften einer invertierbaren Funktion?

Sei f eine Funktion, die jedem x-Wert des Definitionsbereichs nach einer bestimmten Formel oder Vorschrift ein Element y des Wertebereichs zuordnet. Damit die Umkehrfunktion f^{-1} existiert, darf f niemals zwei verschiedenen x-Werten denselben Funktionswert zuordnen, das heisst, es muss für alle möglichen x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich gelten:

$$x_1 \neq x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst *injektiv.*

Damit f eine Umkehrfunktion besitzt, muss allerdings eine weitere Eigenschaft erfüllt sein, die etwas weniger offensichtlich ist. Halten wir uns dazu vor Augen, dass f^{-1} den Definitionsbereich $\mathbb{W}$ haben muss (wenn f eine Funktion von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{W}$ ist). Damit f^{-1} also für jedes Element seines Definitionsbereichs $\mathbb{W}$ auswertbar ist, muss jedes Element von $\mathbb{W}$ ein Funktionswert von f sein. Die Zielmenge von f muss also exakt die Gesamtheit aller Bilder dieser Funktion sein. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst *surjektiv.*



Damit eine Funktion invertierbar ist, muss sie also beide Eigenschaften, Injektivität und Surjektivität, erfüllen; und eben dann nennt man sie *bijektiv.*

Logarithmusfunktionen sind bijektiv

Dass Logarithmusfunktionen bijektiv sind, lässt sich ganz einfach verstehen: Sie sind entweder streng monoton wachsend oder aber streng monoton fallend, was wir oben eingesehen haben; folglich sind sie sicher injektiv. Zudem: Die Funktion

$$f : x \mapsto \log_B(x)$$

ordnet jeder positiven reellen Zahl x eine reelle y Zahl zu, ist also eine Funktion von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}$.

$$\log_B : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

Dabei kommt jede beliebige reelle Zahl y als Bild vor, weil $\log_B(B^y) = y$ ist. Fragt man sich zum Beispiel, ob die Zahl 123.45 ein Funktionswert der Funktion log sein kann, so muss man dies ganz klar bejahen: 123.45 ist das Bild der Zahl $x = 10^{123.45}$. Logarithmusfunktionen sind also auch surjektiv, und insgesamt sind sie somit bijektiv. Wir können also ganz sicher sein, dass sie Umkehrfunktionen besitzen.

Keine Überraschung

Es ist sicher keine Überraschung mehr, dass eine Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion einer bestimmten Exponentialfunktion ist (und umgekehrt). Aber wie können wir diesen Zusammenhang ganz präzise beschreiben? Betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_2(x). \end{aligned}$$

Sie ordnet der Zahl 4 die Zahl 2, der Zahl 32 die Zahl 5, der Zahl 0.5 die Zahl -1 und so weiter zu. Sie ordnet also jeder beliebigen positiven Zahl x denjenigen Exponenten zu, der benötigt wird, wenn man x als Potenz zur Basis 2 schreiben möchte. In anderen Worten: Sie ordnet einer beliebigen positiven Zahl $x = 2^u$ den Exponenten u zu.

Damit sehen wir auch in aller Deutlichkeit, was die Umkehrfunktion leisten muss: Sie muss einer beliebigen Zahl u den Wert 2^u zuweisen. Also handelt es sich bei der Umkehrfunktion um die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{>0} \\ x &\mapsto 2^x. \end{aligned}$$

Es liegt in der Natur der Umkehrung von Funktionen, dass, wenn eine erste Funktion Umkehrfunktion einer zweiten ist, auch die zweite die Umkehrfunktion der ersten ist. Wir können obige Überlegung also auch mit einer Exponentialfunktion starten: Betrachten wir zum Beispiel die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{>0} \\ x &\mapsto 10^x. \end{aligned}$$

Sie weist jeder beliebigen reellen Zahl x den Wert der Potenz 10^x zu. Die Umkehrfunktion ordnet somit jeder beliebigen positiven reellen Zahl y denjenigen Exponenten zur Basis 10 zu, welcher benötigt wird, um den Wert y zu erhalten. Dies ist gerade die Logarithmusfunktion mit Basis 10:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_{10}(x). \end{aligned}$$

Triviale Identitäten zum zweiten

Es ist, wie früher mehrfach festgehalten, die charakteristische Eigenschaft der Umkehrfunktion, dass für jedes Element x des Definitionsbereichs von f Folgendes gilt:

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x. \tag{$\star$}$$

Wenn wir für f zum Beispiel die Exponentialfunktion $\exp_2(x) := 2^x$ einsetzen, so handelt es sich bei der Umkehrfunktion um die Funktion $\log_2(x)$. Somit ist

$$\log_2\left(\exp_2(x)\right) = x$$

für jede beliebige reelle Zahl x. Anders notiert:

$$\log_2\left(2^x\right) = x.$$

Aber dies ist nichts anderes als eine der trivialen Identitäten, denen wir bereits früher begegnet sind. Letztlich ist dies ja nichts anderes als die Definition des Logarithmus. Der hier behandelte Sachverhalt über Funktion und Umkehrfunktion war also bereits in der Definition des Logarithmus angelegt und wartete nur noch auf eine angemessene Würdigung.

Setzen wir für f zum Beispiel die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ ein, so folgt aus ($\star$), dass

$$\exp_{\mathrm{e}}\left(\ln(x)\right) = x$$

ist für jede beliebige positive reelle Zahl x. Anders notiert:

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

Auch dies ist bloss eine weitere unserer trivialen Identitäten, die letztlich einfach der Definition des Logarithmus Ausdruck verleihen. Verallgemeinert können wir also dies festhalten:

Merke:

Sowohl Exponential- als auch Logarithmusfunktionen sind bijektiv und somit umkehrbar. Die Funktion $\log_B(\cdot)$ ist die Umkehrfunktion von

$\exp_B(\cdot)$ und umgekehrt. Es gilt also für jede beliebige reelle Zahl x, dass

$$\log_B\left(\exp_B(x)\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_B\left(B^x\right) = x.$$

$$\boxed{x \underset{\log_B}{\overset{\exp_B}{\rightleftarrows}} B^x}$$

Und es gilt für jede beliebige positive reelle Zahl x, dass

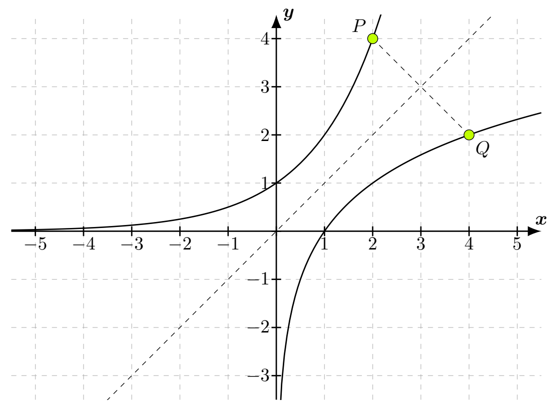
$$\exp_B\left(\log_B(x)\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad B^{\log_B(x)} = x.$$

$$\boxed{x \underset{\exp_B}{\overset{\log_B}{\rightleftarrows}} \log_B(x)}$$

Es ist sehr hilfreich, diese enge Verwandtschaft zwischen Exponential- und Logarithmusfunktion präzise festzuhalten. Denn man versteht jede dieser Funktionen besser, wenn man versteht, dass die eine die Umkehrfunktion der anderen ist und somit einfach die Wirkung der anderen rückgängig macht. Darüber hinaus gibt es im Hinblick auf die Untersuchung der Graphen dieser Funktionen einen weiteren Gewinn, dem wir uns nun zuwenden.

Spiegelbildliche Graphen

Wir wissen von früher, dass die Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion spiegelsymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten sind. Das trifft folglich auch auf die Graphen einer Exponentialfunktion und ihrer zugehörigen Logarithmusfunktion zu. Und auch dies kann uns nicht mehr überraschen, haben wir doch beide Graphen schon eingehend untersucht.



Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen $\exp_2$ und $\log_2$. Die Tatsache, dass die Funktion $\exp_2$ der Zahl $x = 2$ den Wert $y = 4$ zuweist (Punkt P) bedeutet bei der Umkehrfunktion $\log_2$, dass der Zahl $x = 4$ wieder die Zahl $y = 2$ zugeordnet wird (Punkt Q). Die Punkte P und Q liegen natürlich achsensymmetrisch bezüglich der ebenfalls eingezeichneten Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten. Und dies kann leicht verallgemeinert werden:

Weil die Exponentialfunktion $\exp_B$ der Zahl x den Wert B^x zuweist, liegt der Punkt x, B^x auf dem Graphen der Exponentialfunktion. Und weil die Logarithmusfunktion $\log_B$ dem Wert B^x wieder die Zahl x zuweist, liegt der Punkt (B^x, x) auf dem Graphen der Logarithmusfunktion. Da diese beiden Punkte symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden liegen, gilt dies für die ganzen Graphen.

Indem wir die Graphen der Logarithmusfunktionen auf diese Weise mit den Graphen der Exponentialfunktionen verknüpfen können, verstehen wir erstere nun deutlich besser.