Exponentialfunktionen

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler-10_Swiss_Franc_banknote_(front).jpg

Was sind exponentielle Zusammenhänge?

Potenz- und Polynomfunktionen sind nützliche mathematische Instrumente, um viele reale Zusammenhänge von zwei Grössen modellieren zu können, aber sie reichen nicht aus, um „exponentielle Zusammenhänge" zu erfassen. Bei exponentiellen Zusammenhängen wird der Output bei regelmässiger Erhöhung des Inputs stets mit demselben Faktor multipliziert. Das könnte zum Beispiel eine zeitlich sich verändernde Grösse sein, die bei immer gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor anwächst oder verkleinert wird. Hier sind einige typische Beispiele für exponentielle Zusammenhänge:

> Ein Geldbetrag, der einer festen jährlichen Verzinsung unterliegt, wächst exponentiell.
>
> Bakterienkulturen und viele Populationen von Lebewesen ohne Fressfeinde wachsen zu Beginn exponentiell. Auch die Menschheit tut dies seit etwa 100 Jahren.
>
> Die Anzahl Schaltkreiskomponenten, die auf einem Computer-Chip Platz finden, wächst seit etwa 40 Jahren exponentiell.
>
> Die Temperatur eines heissen Gegenstandes in einer kühlen Umgebung sinkt angenähert exponentiell.
>
> Die Anzahl Nuklide bei einem radioaktiven Zerfall verhält sich exponentiell.
>
> Tritt Licht in eine Wasser- oder Glasschicht ein, so vermindert sich seine Intensität exponentiell.

Wir müssen uns bewusst machen, dass andere Funktionstypen ein solches Verhalten nicht abbilden können: Bei linearen Funktione $f(x) = a \cdot x + b$ wird bei regelmässiger Erhöhung von x der Output stets um denselben Wert *additiv* verändert; der Funktionswert wächst ja bei jedem Einerschritt, um den man sich auf der x-Achse nach rechts bewegt, um a an. Bei der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ ver-4-facht sich der Funktionswert, wenn man von $x = 1$ zu $x = 2$ übergeht, ver-2.25-facht sich aber, wenn man von $x = 2$ zu $x = 3$ übergeht; von regelmässiger *multiplikativer* Veränderung kann also keine Rede sein. Und auch alle anderen Polynomfunktionen oder Potenz- und Wurzelfunktionen vermögen das gewünschte Verhalten nicht abzubilden.

Da exponentielle Prozesse in der Praxis besonders häufig sind, lohnt es sich, einen neuen Funktionstyp zu studieren, der ein solches Verhalten modellieren kann. Dabei handelt es sich - wenig überraschend - um die Exponentialfunktion.

Definition:
Seien $a, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a > 0$ und $a \neq 1$. Eine Funktion der Art

$$f : x \mapsto c \cdot a^x$$

*heisst **Exponentialfunktion**. Die spezielle Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ (also mit $c = 1$) wird oft auch so notiert:* $\exp_a(x)$.

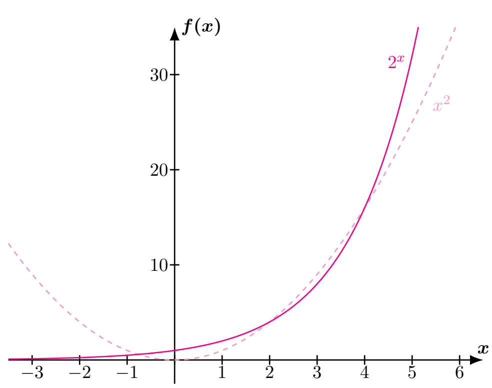
Hier sind einige wichtige Ergänzungen:

> Eine Exponentialfunktion ist natürlich auf allen reellen Zahlen definiert. Es gibt ja keine reelle Zahl x, für die der Term a^x (bei $a > 0$) nicht sinnvoll wäre. Es ist aber auch klar, dass wir genau damit Schwierigkeiten

hätten, wenn a entweder gleich 0 oder negativ wäre. Das ist auch der Hauptgrund, weshalb wir in obiger Definition $a > 0$ verlangt haben.

Oft wird auch der Fall $a = 1$ ausgeschlossen. In diesem Fall geht die Exponentialfunktion in die lineare und sogar konstante Funktion $x \mapsto c$ über.

Häufig werden Exponential- und Potenzfunktionen verwechselt, vermutlich, weil beide äusserlich die Form einer Potenz haben. Potenzfunktionen enthalten einen Term der Art x^p, und Exponentialfunktionen enthalten einen Term der Art a^x . Obwohl beide Terme Potenzen mit einer Basis und einem Exponenten sind, handelt es sich doch um zwei ganz verschiedene Dinge: Während bei der Potenzfunktion die unabhängige Funktionsvariable in der Basis steht und der Exponent eine Konstante ist, ist es bei der Exponentialfunktion gerade umgekehrt. Es lohnt sich, dass wir uns diesen Unterschied sehr gut einprägen, um später nicht Fehler zu machen, die genau aus dieser Verwechslung resultieren. Besonders deutlich sieht man den Unterschied graphisch:



Eigenschaften

Stellen wir uns nun als nächstes die Frage, was wir alles über die Graphen von Exponentialfunktionen aussagen können und ob wir mit obiger Definition wirklich genau das einfangen, was wir beabsichtigt hatten. Die Absicht war ja, eine Funktion zu „zimmern“, bei der bei immer gleicher Erhöhung der Inputvariablen der Funktionswert immer mit demselben Faktor (multiplikativ) verändert wird. Um das zweite vorwegzunehmen: Ja, in der Tat, diese Eigenschaft ist erfüllt, und das lässt sich ganz leicht einsehen:

An einer beliebigen Stelle x hat die Exponentialfunktion den Wert

$$f(x) = c \cdot a^x.$$

Und an der um 1 erhöhten Stelle hat sie den Funktionswert

$$\begin{aligned} f(x+1) &= c \cdot a^{x+1} \\ &= c \cdot a^x \cdot a^1 \\ &= f(x) \cdot a, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichheit wir ein Potenzgesetz verwendet haben. Die letzte Gleichung zeigt, dass bei jeder Erhöhung der Inputvariablen um 1 der Funktionswert ver-a-facht wird. Die Exponentialfunktion hat also in der Tat die gewünschte Eigenschaft.

Merke:

Erhöht man bei einer Exponentialfunktion $f : x \mapsto c \cdot a^x$ die Inputvariable um 1, so erfährt der Funktionswert eine Ver-a-fachung.

Umgekehrt erfährt der Funktionswert folglich eine Ver-$1/a$ -fachung, wann immer die Inputvariable um 1 vermindert wird.

Wollen wir also etwa, dass ein Kapital pro Zeiteinheit um 5% vermehrt, also mit der Zahl 1.05 multipliziert wird, so müssen wir einfach $a = 1.05$ und somit den Ansatz $f(x) = c \cdot 1.05^x$ wählen. Wollen wir dagegen, dass ein Wagen pro Zeiteinheit 12.5% an Wert verliert, also mit der Zahl 0.875 multipliziert wird, so müssen wir $a = 0.875$ und somit den Ansatz $f(x) = c \cdot 0.875^x$ wählen. Weiss man, dass eine Grösse sich bei jeder Erhöhung von x um 1 verdoppelt, so wählt man den Ansatz $f(x) = c \cdot 2^x$, und so weiter.

Und was können wir alles über den Graphen einer Exponentialfunktion sagen?

Die Funktion hat sicherlich keine Nullstelle, da der Term $c \cdot a^x$ für $c \neq 0$ und $a > 0$ niemals 0 werden kann. Die Funktion ist also überall positiv, falls $c > 0$ vorausgesetzt wird, und sonst überall negativ. Auch der y-Achsenabschnitt ist ganz leicht zu bestimmen:

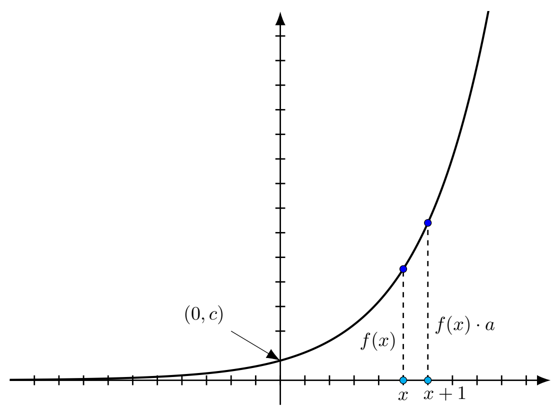
$$f(0) = c \cdot a^0 = c \cdot 1 = c.$$

Im Folgenden beschränken wir uns auf $c > 0$. Dann ist klar, dass die Funktion entweder streng monoton wachsend sein muss, falls nämlich $a > 1$ ist, oder aber streng monoton fallend, falls $0 < a < 1$ ist. Im ersten Fall spricht man von einer *Wachstumsfunktion*, im zweiten von einer *Zerfallsfunktion*. Das liegt einfach an der charakteristischen Eigenschaft einer Exponentialfunktion, wonach bei jeder Erhöhung der Inputvariablen um 1 der Funktionswert ver-a-facht wird. Oder es lässt sich auch so begründen: Betrachten wir eine beliebige Stelle x sowie eine etwas spätere Stelle $x + h$ (mit $h > 0$), so ist

$$\begin{aligned} f(x+h) &= c \cdot a^{x+h} \\ &= c \cdot a^x \cdot a^h \\ &= f(x) \cdot a^h. \end{aligned}$$

Für $a > 1$ ist dann $a^h > 1$, woraus folgt, dass $f(x+h) > f(x)$ ist - die Funktion ist also streng monoton wachsend. Ist dagegen $0 < a < 1$, so ist $0 < a^h < 1$, woraus folgt, dass $f(x + h) < f(x)$ ist - die Funktion ist also streng monoton fallend. Insbesondere ist also jede Exponentialfunktion, sofern $a \neq 1$ ist, injektiv. Schliesslich hat der Graph jeder Exponentialfunktion, sofern $a \neq 1$ ist, die x-Achse als Asymptote. Ist nämlich $a > 1$ (Wachstumsfunktion), so strebt der Term a^{-x} für $x \to \infty$ gegen 0, und ist $0 < a < 1$ (Zerfallsfunktion), so strebt der Term a^x für $a \to \infty$ gegen 0.

Damit ergeben sich also folgende Graphen:

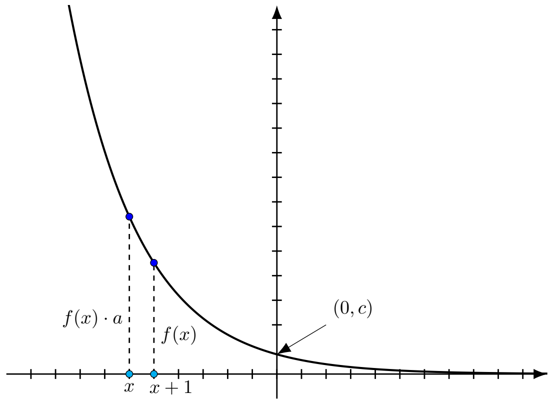


Typische Wachstumsfunktion $a > 1$

Merke:

Der Graph der Exponentialfunktion $f : x \mapsto c \cdot a^x$ hat folgende Eigenschaften:

- keine Nullstellen
- positiv
- y-Achsenabschnitt: c
- streng monoton wachsend für $a > 1$
- streng monoton fallend für $0 < a < 1$



Typische Zerfallsfunktion $a < 1$

injektiv für $a \neq 1$

x-Achse ist Asymptote, wenn $a \neq 1$

Symmetrie?

Es folgt aus dem eben Gesagten, dass der Graph einer Exponentialfunktion im Falle $a \neq 1$ keine Symmetrien aufweisen kann. Es ist aber hilfreich, kurz über die Symmetrie *zweier* Graphen solcher Funktionen nachzudenken:

Ist zum Beispiel $a = 2$, so verdoppelt sich der Funktionswert bei jeder Erhöhung von x um 1. Ist aber $a = 0.5$, so halbiert sich der Funktionswert bei jeder Erhöhung von x um 1. Es ist also zu vermuten, dass die Graphen von $f : x \mapsto 2^x$ und $g : x \mapsto 0.5^x$ achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse liegen. Und tatsächlich lässt sich das leicht bestätigen:

$$f(x) = 2^x,$$
$$g(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \left(2^{-1}\right)^{-x} = 2^x$$

Also ist $g(-x) = f(x)$, was ja die behauptete Symmetrie beweist. Das lässt sich sofort verallgemeinern zu der Aussage:

MERKE:

Die Graphen der Funktionen

$$f : x \mapsto a^x$$

und

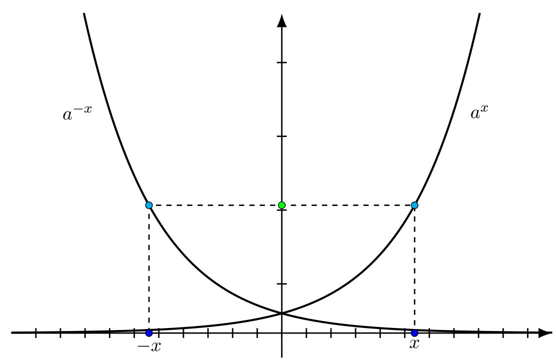
$$g : x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

sind achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

Dies einfach deshalb, weil

$$g(-x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \left(a^{-1}\right)^{-x} = a^x = f(x)$$

gilt. Prägen wir uns das auch graphisch ein:



Der Einfluss von c

Hält man die Basis a fest und verändert lediglich den Wert c, so verändert sich natürlich der Graph auch. Aber wie genau? Betrachten wir einerseits die Funktion

$$f : x \mapsto 2^x$$

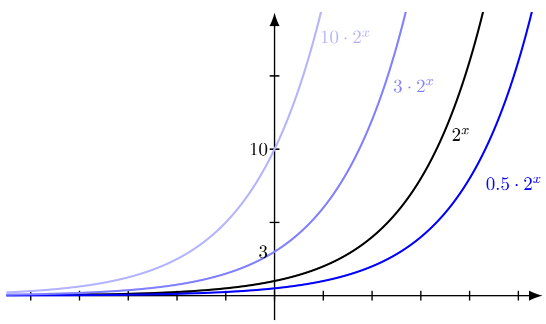
und andererseits die Funktionen

$$g : x \mapsto 3 \cdot 2^x$$

und
$$h : x \mapsto 0.5 \cdot 2^x,$$
so wird klar, dass ein Funktionswert von g dreimal grösser ist als der Funktionswert von f an derselben Stelle und dass ein Funktionswert von h halb so gross ist wie der Funktionswert von f an derselben Stelle. Der Faktor c bewirkt also einfach eine Streckung/Stauchung des Graphen in y-Richtung.

Merke:

Der Graph von $x \mapsto c \cdot a^x$ ist gegenüber dem Graphen von $x \mapsto a^x$ um den Faktor c in y-Richtung gestreckt beziehungsweise gestaucht.



Die zentrale Frage

Ein Biologe erzählt uns vom Bakterium *Escherichia coli*, das im menschlichen und tierischen Darm zu Hause ist und dort vor allem als Vitaminproduzent tätig ist. Er sagt, dass sich das Bakterium unter idealen Bedingungen in Laborkulturen alle 20 Minuten teilt, so dass die Anzahl solcher Bakterien sich also alle 20 Minuten verdoppelt.

Eine Chemikerin erzählt uns vom Iod, das unentbehrlicher Bestandteil des tierischen und menschlichen Organismus ist und mit der Nahrung aufgenommen wird. Vom Iod seien bisher 36 verschiedene Isotope bekannt, von denen aber nur ein einziges, nämlich ^{127}I, stabil sei. Instabile Isotope von Iod gäbe es sowohl mit sehr langen, als auch mit sehr kurzen Halbwertszeiten. Das ^{131}I zum Beispiel habe eine Halbwertszeit von 8 Tagen.

In beiden Fällen können wir uns als Mathematikerin oder Mathematiker die folgende Frage stellen: Sind wir in der Lage, aus den Angaben eine Funktionsgleichung aufzustellen, die den beschriebenen Zusammenhang zwischen den Grössen korrekt modelliert? In beiden Beispielen ist die unabhängige Variable die Zeit, und die abhängige Variable ist im ersten Beispiel die Anzahl Bakterien und im zweiten die Anzahl Iod-Kerne. Aber auch wenn es sich um andere Grössen handeln würde, stellt sich uns die Frage, ob wir die Funktionsgleichung richtig aufstellen können, wenn wir wissen, dass sich der Funktionswert alle 20 Minuten verdoppelt oder alle 8 Minuten halbiert. Noch allgemeiner: Wenn x die unabhängige Variable und y die abhängige Variable ist und wenn wir wissen, dass sich y jedes Mal ver-p-facht, wenn man x um q erhöht, können wir dann eine Funktion aufstellen, die genau dieses Verhalten zeigt? Genau diese Frage soll nun im Folgenden befriedigend beantwortet werden.

Exponentialfunktionen aufstellen

Beginnen wir dazu mit dem Bakterien-Beispiel. Zunächst ist klar, dass wir eine Exponentialfunktion benötigen. Warum ist das klar? Weil die charakteristische Eigenschaft einer Exponentialfunktion ja gerade darin besteht, dass sich der Funktionswert immer mit demselben Faktor multiplikativ verändert, wenn man x um denselben Wert erhöht. Und genau dieses Verhalten hat uns der Biologe beschrieben. Wir wählen also den Ansatz

$$B(t) = c \cdot a^t$$

einer Exponentialfunktion, worin t die Zeit und $B(t)$ die Anzahl Bakterien nach t Zeiteinheiten ist. Und unser Ziel besteht darin, a und c festzulegen sowie genau zu sagen, wie die Zeitskala beschaffen sein soll.

Beginnen wir mit der Zeitskala. Wie wollen wir die Zeit messen? In Minuten? In Stunden? Oder noch anders? Das ist Geschmackssache, aber es ist klar, dass Sekunden und Jahre wahrscheinlich keine besonders günstigen Einheiten für diese Anwendung sind. Der Biologe wählte für seine Angaben Minuten, darum macht es wohl Sinn, Minuten als Einheit zu wählen. Ferner legen wir den zeitlichen Nullpunkt auf den Beginn des Experimentes. Wir starten unsere Beobachtung der Population ja zu irgendeinem Zeitpunkt, und eben dann sei $t = 0$.

Damit kennen wir aber bereits die Bedeutung des Parameters c. Wegen

$$B(0) = c \cdot a^0 = c \cdot 1 = c$$

bedeutet c offenbar die Grösse der Bakterienpopulation zu Beginn unseres Experimentes. Es spricht somit einiges dafür, anstelle des neutralen Buchstabens c die aussagekräftigere Bezeichnung B_0 zu wählen. Damit haben wir also schon

$$B(t) = B_0 \cdot a^t, \qquad [t] = \text{min}.$$

Die wichtigste Frage ist, wie wir a wählen sollen. Der Biologe sagte, dass die Anzahl alle 20 Minuten verdoppelt wird. Sollen wir also $a = 2$ wählen? Die Funktion

$$f(t) = B_0 \cdot 2^t$$

hätte die Eigenschaft, dass der Funktionswert jedes Mal verdoppelt wird, wenn man t um 1 erhöht. Wie schaffen wir es, dass sich der Funktionswert immer dann verdoppelt, wenn man t um 20 (Minuten) erhöht?

Hier muss man ganz vorsichtig sein! Eine typische Fehlüberlegung besteht darin, zu argumentieren, dass wenn eine Grösse sich alle 20 Minuten verdoppelt, sie sich folglich pro einzelne Minute ver-0.1-facht mit der falschen Begründung, dass wenn eine Grösse in 20 Minuten mit 2 multipliziert wird, dass sie dann wohl in einer einzelnen Minute mit dem 20. Teil von 2, also mit 0.1 multipliziert wird. Es ist sehr wichtig, dass wir gut erklären können, weshalb dies falsch ist: Eine Multiplikation mit 0.1 pro Minute hätte eine drastische Verkleinerung der Population zur Folge, und nach 20 Minuten wäre diese praktisch verschwunden.

Richtig und empfehlenswert ist dagegen die folgende Argumentation:

Wir wissen, dass eine Verdoppelung alle 20 Zeitschritte eintritt, und wir suchen den Faktor a für eine einzelne Minute. Dieser Faktor ist zunächst noch unbekannt, aber wir wissen, dass die Grösse

in einer Minute ver-a-facht,

in zwei Minuten ver-a^2-facht,

in drei Minuten ver-a^3-facht und so weiter und

in 20 Minuten ver-a^{20}-facht wird.

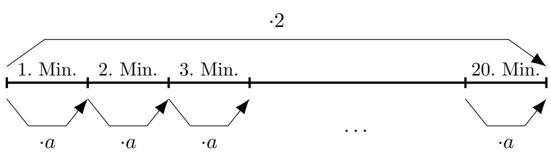
Folglich muss

$$a^{20} = 2$$

gelten, und das bedeutet, dass

$$a = \sqrt[20]{2} = 1.03526\ldots$$

ist. Die folgende Grafik macht das ganz deutlich: Wir suchen eine Zahl a mit der Eigenschaft, dass ihre 20. Potenz 2 ergibt.



Wenn wir also wissen, dass alle 20 Minuten eine Verdoppelung passiert, dann müssen wir, um den Faktor für einen einzelnen Zeitschritt zu finden, nicht durch 20 dividieren, sondern die 20. Wurzel ziehen! Damit haben wir nun also die fertige Funktion vor uns:

$$B(t) = B_0 \cdot \left(\sqrt[20]{2}\right)^t = B_0 \cdot 1.03526\ldots^t \qquad [t] = \text{min.}$$

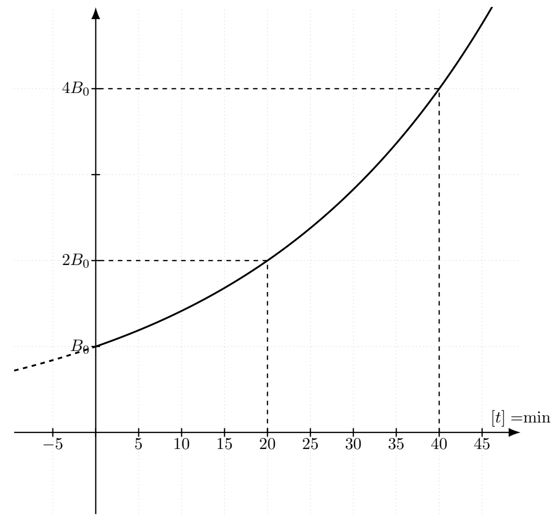
Freilich könnte man diese Funktion auch in einer leicht veränderten Form notieren:

$$B(t) = B_0 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$$

und diese Form hat den Vorteil, dass man sehr gut erkennt, dass mit jeder Erhöhung von t um 20 der Exponent um 1 anwächst und der Funktionswert damit verdoppelt wird. Insgesamt können wir also die Angaben des Biologen so durch eine Funktion ausdrücken:

$$\begin{aligned} B(t) &= B_0 \cdot \left(\sqrt[20]{2}\right)^t \\ &= B_0 \cdot 2^{\frac{t}{20}} \\ &= B_0 \cdot 1.03526\ldots^t. \end{aligned}$$

(t in Minuten nach Start des Experiments.)



Hilfe für die Chemikerin

Fragt uns die Chemikerin nach einer geeigneten Funktion für ihr Iod-Beispiel, so macht uns das nun keine Mühe mehr. Die Angaben der Chemikerin weisen ganz deutlich auf eine Exponentialfunktion hin (Halbierung in jeweils 8 Tagen). Wir stellen also den folgenden Ansatz auf:

$$I(t) = c \cdot a^t$$

in dem wir t als Anzahl Tage nach Beginn des Experiments verstehen. Die Bedeutung des Parameters c erkennen wir, wenn wir bedenken, dass

$$I(0) = c \cdot a^0 = c \cdot 1 = c$$

ist. Der Parameter c ist also gerade die Anzahl Iod-Kerne zum Zeitpunkt 0, und darum ersetzen wir ihn lieber durch den aussagekräftigeren Term I_0:

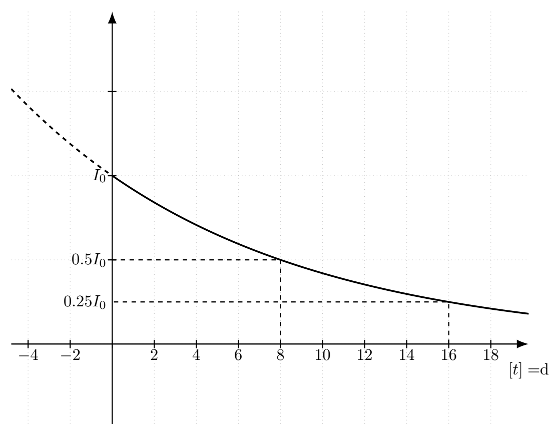
$$I(t) = I_0 \cdot a^t.$$

Im vorangehenden Beispiel haben wir gut gelernt, dass wir nun nicht einfach $a = 0.5$ setzen dürfen; das hätte ja eine Halbierung pro Zeitschritt, also pro Tag, zur Folge. Damit sich alle

8 Tage eine Halbierung einstellt, müssen wir uns fragen, welche Zahl in der 8. Potenz den Wert 0.5 ergibt. Das ist natürlich die achte Wurzel von 0.5. Folglich ist

$$I(t) = I_0 \cdot \left(\sqrt[8]{0.5}\right)^t = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}},$$

t in Tagen nach Beginn des Experiments.



Und allgemein?

Die Zahlen können sich ändern, das Prinzip aber bleibt immer gleich. Wenn wir wissen, dass sich eine bestimmte Grösse jeweils ver-p-facht, wenn die unabhängige Variable x um q erhöht wird, dann wissen wir sofort, dass es sich um eine Exponentialfunktion handeln muss, weil das gerade ihre charakteristische Eigenschaft ist. Da die Ver-p-fachung aber nicht bei jeder Erhöhung von x um 1, sondern bei jeder Erhöhung von x um q geschieht, müssen wir einfach nach derjenigen Zahl suchen, deren q-te Potenz p ergibt. Damit ergibt sich dann die Funktion

$$f(x) = c \cdot (\sqrt[q]{p})^x = c \cdot p^{\frac{x}{q}}.$$

Suche nach einer coolen Zahl

In einem Internetforum war kürzlich über die Zahl e zu lesen: „Das ist sozusagen die einzige coole Zahl, wenn es um Exponentialfunktionen geht.“ Und tatsächlich: Seit ihrer Einführung im Jahr 1736 werden ihre Eigenschaften immer wieder bestaunt, und es wären Mathematik, Naturwissenschaft und Technik ohne sie gar nicht mehr denkbar. Die Frage von Jakob Bernoulli nach dem Anwachsen eines Geldbetrages bei stetiger Verzinsung hat zum folgenden Ergebnis geführt: Wird der Betrag von CHF 1.– bei einem Jahreszins von 100% angelegt, aber so, dass es n regelmässig über das Jahr verteilte Zinstermine gibt, bei denen jeweils der proportionale Teil des Jahreszinses zum Konto dazugerechnet wird, dann wächst dieser Franken innerhalb eines Jahres auf den Wert

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

an ($n \in \mathbb{N}$). Zahlbeispiele zeigen, dass dieser Wert mit wachsendem n immer nur ansteigt, so dass sich die Frage erhebt, ob der Betrag unbeschränkt wachsen wird oder eine Wachstumsgrenze (einen sogenannten Grenzwert) hat. Die Zahlen legen letzteres nahe, denn für n gleich $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ erhält man der Reihe nach die folgenden Werte:

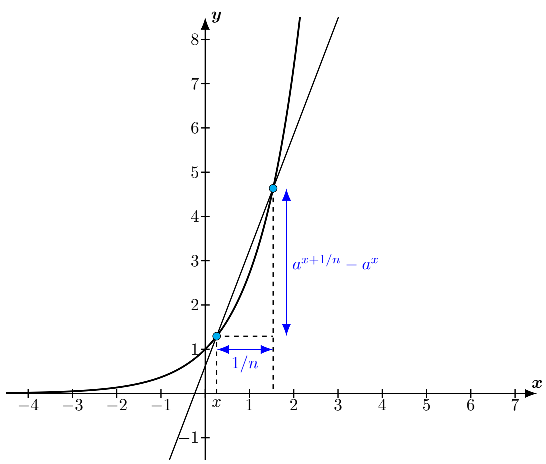
2.0
2.59374246...
2.704813829...
2.716923932...
2.718145927...
2.718268237...
2.718280469...

Es scheint also so zu sein, dass der Term

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

für wachsendes n gegen eine Zahl strebt - man sagt auch: konvergiert - die mit $2.71828\ldots$ anfängt. Diese Zahl wird e genannt.

Alternativ zu diesem Zugang kann man auch die Frage beantworten, welches die ganz besondere Exponentialfunktion ist, die an jeder Stelle ihr eigenes Wachstum misst. In anderen Worten: Für welche Basis a hat die Exponentialfunktion $\exp_a(x) = a^x$ die Eigenschaft, dass an jeder Stelle der Funktionswert und die momentane Steigung übereinstimmen? Wir sind damit demjenigen Wachstum auf der Spur, bei dem das Mass an Wachstum direkt vom Wert der wachsenden Grösse gesteuert wird.



Bei dieser Untersuchung lernt man, dass die gesuchte Basis a die „Gleichung“

$$a^x \approx \frac{a^{x+\frac{1}{n}} - a^x}{\frac{1}{n}}$$

erfüllen muss und zwar desto genauer, je grösser n und je kleiner folglich das Inkrement Δx gewählt wird. Einige Umformungen ergeben nun:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\cdot a^x \approx a^x \cdot a^{\frac{1}{n}} - a^x \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{n}\cdot a^x \approx a^x \cdot \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{n} \approx a^{\frac{1}{n}} - 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 1+\frac{1}{n} \approx a^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

und schliesslich

$$a \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Dabei nähern wir uns dem richtigen Wert von a immer mehr an, wenn wir n gegen Unendlich tendieren lassen.

Wiederum stossen wir auf dieselbe Zahl wie schon in der ersten Untersuchung. Das stetige Wachstum, bei dem in jedem Augenblick der proportionale Teil des Jahreszinses von 100% dazu gerechnet wird, entspricht gerade dem Wachstum, bei dem die momentane Steigung an jeder Stelle dem Funktionswert entspricht. Und die Zahl, die dieses Wachstum charakterisiert, ist der Wert, gegen den der Term

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

tendiert, wenn n gegen Unendlich strebt. Ein solches Streben wird in der Mathematik Grenzwertprozess und der Endwert Grenzwert genannt. Wir definieren:

Definition:
Mit e *bezeichnen wir den* ***Grenzwert*** *des Terms*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

für wachsendes n und bezeichnen diesen als ***Eulersche Zahl****. Näherungsweise ist*

$$\mathrm{e} = 2.7182818284\ldots$$

Zudem bezeichnen wir mit $\exp(x)$ *diejenige Exponentialfunktion, deren Basis die Eulersche Zahl ist:*

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Der Buchstabe e wurde erstmals von Euler selbst im Jahr 1736 verwendet; es gibt jedoch keinen Hinweis darauf, dass er ihn in Anlehnung an seinen Namen eingeführt hat. In der Tat wäre das sogar sehr verwunderlich. Während zu Eulers Zeit 23 Nachkommastellen dieser Zahl bekannt waren, sind bis heute mehr als 10^{12} Stellen berechnet worden. Wer sich einige Nachkommastellen von e einprägen will, sich das aber nicht zutraut, der kann sich einer von zahlreichen Merkregeln bedienen. Sie sind so konstruiert worden, dass die Anzahl Buchstaben der einzelnen Wörter gerade den aufeinanderfolgenden Stellen von e entsprechen:

Merkregeln Eulersche Zahl

It enables a numskull to memorize a quantity of numerals.

To express e, remember to memorize a sentence to simplify this.

Die Entdeckung dieser Zahl ist nur eine von unzähligen beeindruckenden Leistungen des Schweizer Mathematikers Leonhard Euler (1707 – 1783). Die Schweiz ist zu Recht stolz auf diesen überragenden Wissenschaftler und hat darum von 1976 bis 1995 die 10-Franken-Note mit seinem Bild versehen.

Abbildung 1: Schweizer Geldschein, 1979–1995

Eigenschaften

Da nun klar ist, dass wir uns einfach nur um eine Exponentialfunktion bemühen, wenn auch um eine ganz spezielle, herausragende, können wir alles früher über Exponentialfunktionen Gelernte auf diese eine Funktion übertragen. Das heisst, wir wissen, dass

die Funktion $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ keine Nullstelle besitzt,

dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$,

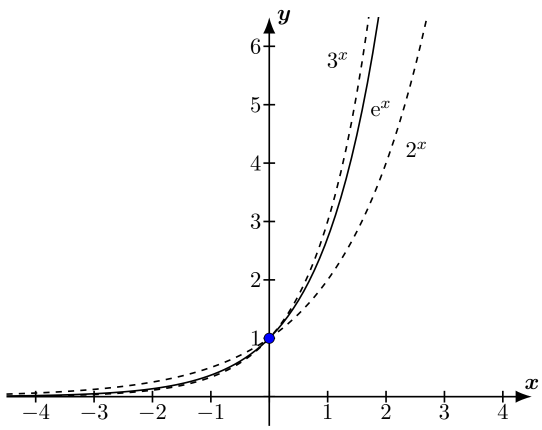
dass der Graph die y-Achse im Punkt $(0, 1)$ schneidet,

dass die Funktion streng monoton wachsend ist,

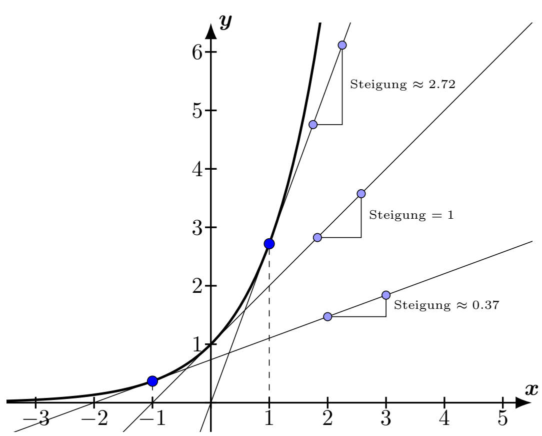
dass die Funktion injektiv ist

und dass die x-Achse Asymptote an den Graphen ist.

Da $2 < \mathrm{e} < 3$ ist, überrascht es nicht, dass der Graph von $\exp(x)$ zwischen den Graphen der Funktionen 2^x und 3^x verläuft:



Wir wissen nun aber überdies, dass die Funktion an jeder Stelle ihre eigene Steigung misst, genauer, dass an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass der Funktionswert und die momentane Steigung übereinstimmen. An der Stelle 0 hat die Kurve also Steigung $\mathrm{e}^0 = 1$, an der Stelle 1 hat sie Steigung $\mathrm{e}^1 = 2.71828\ldots$, an der Stelle -1 hat sie die Steigung $\mathrm{e}^{-1} = 0.367879\ldots$, und so weiter.



Es gibt zahlreiche weitere interessante Eigenschaften der Zahl e, von denen wir einige ohne Beweis hier anfügen möchten:

Zunächst ist e eine *irrationale* Zahl. Erinnern wir uns, was das genau heisst: Die Eulersche Zahl kann also nicht in der Form eines Bruches mit ganzzahligem Zähler und Nenner geschrieben werden. In anderen Worten: Die Dezimalentwicklung ist nicht-abbrechend und nicht-periodisch. Den ersten Beweis hierfür gab Euler selber im Jahr 1737. Es ist ein recht einfacher Widerspruchsbeweis, der von interessierten Leserinnen und Lesern gut recherchiert und sicher verstanden werden kann.

Des Weiteren ist e *transzendent*, das heisst, es kann keine Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten geben, zu der die Eulersche Zahl eine Lösung ist. Zum Beispiel ist $\sqrt{2}$ Lösung der algebraischen Gleichung $x^2 - 2 = 0$, und deshalb nennt man diese Zahl *algebraisch*, das Gegenteil von transzendent. Und die Zahl

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

die beim Goldenen Schnitt eine wichtige Rolle spielt, ist eine Lösung der algebraischen Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$, weswegen auch diese Zahl algebraisch und eben nicht transzendent ist. Für e (und übrigens auch für π) ist es aber prinzipiell unmöglich, eine Gleichung dieser Art herzustellen, die dann als Lösung ebendiese Zahl produziert. Das hat Charles Hermite 1873 nachweisen können. Die *algebraischen Kräfte* von einfachen Polynomgleichungen reichen offenbar nicht aus, um die Zahl e zu erzeugen. In anderen Worten: Die Eulersche Zahl übersteigt (im Fremdwort: *transzendiert*) die Kräfte der Algebra. Die Eulersche Zahl nimmt also auch in dieser Beziehung eine Sonderrolle ein.

Schliesslich ist die Exponentialfunktion auch darum bemerkenswert, weil sie in einem ganz bestimmten Rennen immer unangefochtene Siegerin ist und bleiben wird. Wir haben uns daran gewöhnt, dass eine Exponentialfunktion „immer stärker wächst“, jedenfalls, wenn die Basis

> 1 ist. Dennoch könnte man vermuten, dass auch ein exponentielles Wachstum durchaus von einer Potenzfunktion noch übertroffen werden kann, wenn man nur den Exponenten gross genug wählt. Eine Potenzfunktion ist ja eine Funktion der Art $x \mapsto x^p$. Wählt man p gross genug, müsste es doch möglich sein, eine Exponentialfunktion bezüglich Wachstums zu schlagen!?

Angenommen, wir führen ein „Rennen" durch zwischen der Potenzfunktion x^{1000}, die ungeheuer schnell wächst, und der Exponentialfunktion e^x. Anfangs, für kleine Inputzahlen, wird die Potenzfunktion wesentlich grössere Funktionswerte liefern als die Exponentialfunktion, und sie wird ihren Vorsprung sehr lange halten können. Und dennoch wird die Exponentialfunktion schliesslich aufholen und ab gewissen Inputzahlen (über $x = 1918$) die Werte der Potenzfunktion überholen.

In der Tat ist das Wachstum der Exponentialfunktion so, dass es das Wachstum jeder beliebigen Potenzfunktion schliesslich übertrifft, ganz einerlei, wie gross der Exponent p gewählt wird. Es lässt sich nämlich der folgende Satz beweisen:

Satz:
Für jedes feste $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^p} \right) = \infty.$$

Die Exponentialfunktion wächst für gegen Unendlich strebendes x schneller als jede nur erdenkliche feste Potenz der Variablen.

Dabei bezeichnet lim den Grenzwert $\lim_{x\to\infty}$ des Folgeterms für immer grösser werdendes x.

Die neue Form der Exponentialfunktion

Alle bisherigen Überlegungen haben zur folgenden Einsicht geführt: Untersuchen wir die Wertentwicklung eines Geldbetrages bei stetiger Verzinsung (und Jahreszins 100%) oder suchen wir gezielt nach derjenigen Exponentialfunktion, die an jeder Stelle ihr eigenes momentanes Wachstum misst, so gelangen wir zur Funktion

$$f(x) = c \cdot \mathrm{e}^x = c \cdot \exp(x)$$

mit der Eulerschen Zahl als Basis. Die Tatsache, dass diese Zahl charakteristisch für das natürliche, stetige, direkt vom Wert der wachsenden Grösse abhängige Wachstum ist, hat zur Folge, dass die Eulersche Zahl Bestandteil von sehr vielen naturwissenschaftlichen Gesetzmässigkeiten ist, die ja meist nicht ein abgehacktes, diskretes Wachstum untersuchen, sondern eben ein stetiges.

Nun könnte man einwenden, dass bei einem natürlichen Wachstum die Wachstumsrate selten exakt gleich dem Wert der wachsenden Grösse ist. In der Tat beschreibt die Funktion $f(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$ nur dieses Wachstum korrekt und ist somit viel zu unflexibel für die Modellierung beliebiger natürlicher Wachstumsprozesse. Hat zum Beispiel eine Population aktuell den Wert 1000, so würde man ja nicht erwarten, dass die momentane Steigung der Wachstumskurve auch gerade den Wert 1000 hat; das würde ja bedeuten, dass im nächsten Zeitschritt 1000 neue Individuen dazukommen werden. Vielmehr ist die momentane Steigung der Populationskurve vielleicht ein bestimmter Prozentsatz der Populationsgrösse, etwa 5% dieser Grösse oder Ähnliches. Natürliches, stetiges Wachstum meint einfach, dass die momentane Steigung *proportional* ist zum aktuellen Wert der wachsenden Grösse, aber nicht notwendigerweise identisch.

Um diese allgemeinere Situation formal beschreiben zu können, muss man die Funktion

$$f(x) = c \cdot \mathrm{e}^x = c \cdot \exp(x)$$

flexibler gestalten. Man tut dies, indem man im Exponenten einen zusätzlichen Parameter einführt:

$$f(x) = c \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x} = c \cdot \exp(r \cdot x).$$

Mit etwas Differentialrechnung lässt sich nämlich nachweisen, dass die momentane Steigung dieser Funktion gerade dem r-fachen des aktuellen Funktionswertes entspricht, und dies sorgt für die nötige Flexibilität. Es ist darum nicht verwunderlich, dass bei zahlreichen in Naturwissenschaft und Technik untersuchten Wachstumsprozessen, die Funktion $c \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}$ eine zentrale Rolle spielt.

Welchen Vorteil hat die Basis e?

Bevor wir einige solche untersuchen, ist ein wichtiger Hinweis angebracht: Die bisher benutzte Form

$$f : x \mapsto c \cdot a^x$$

und die neue Form

$$f : x \mapsto c \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}$$

sind natürlich äquivalent. Denn einerseits kann jede positive Zahl a in der Form e^r geschrieben werden für ein geeignetes r, so dass also $c \cdot a^x$ in $c \cdot (\mathrm{e}^r)^x = c \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}$ umgeformt werden kann. Und umgekehrt kann $c \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}$ mit Hilfe eines Potenzgesetzes in $c \cdot (\mathrm{e}^r)^x$ umgeformt werden, und wenn man dann für e^r den neuen Buchstaben a setzt, hat man die andere Form erreicht. Streng genommen ist es also einerlei, welche Form man bevorzugt.

Aber: Die neue Form

$$f : x \mapsto c \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}$$

den grossen Vorteil, dass der Proportionalitätsfaktor, mit dem der aktuelle Wert der wachsenden Grösse und die aktuelle Wachstumsrate zusammenhängen, auf einen Blick ersichtlich ist. Wächst eine Grösse zum Beispiel so, dass die Wachstumsrate (die momentane Steigung) 50% des aktuellen Wertes beträgt, so kann dies durch die Funktion

$$f : x \mapsto c \cdot \mathrm{e}^{0.5 \cdot x}$$

ausgedrückt werden. Würde man dagegen $\mathrm{e}^{0.5} = 1.6487\ldots$ ausrechnen und die Funktion in der Form

$$f : x \mapsto c \cdot 1.6487\ldots^x$$

angeben, so ginge diese Information verloren oder müsste aus der Basis erst mühsam rekonstruiert werden.

Dass in der Form $f : x \mapsto c \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}$ die Zahl r gerade der Proportionalitätsfaktor ist, mit dem der aktuelle Wert der wachsenden Grösse multipliziert werden muss, um die aktuelle Wachstumsrate zu erhalten, kann an dieser Stelle nicht befriedigend begründet werden, da zur Einsicht ein wenig Differentialrechnung nötig ist. Gleichwohl ist dieser Hinweis sehr wichtig, um zu verstehen, warum zahlreiche exponentielle Prozesse, die in der Mathematik, in Naturwissenschaft und Technik untersucht werden, die Eulersche Zahl als Basis bevorzugen.

Beispiele aus der Naturwissenschaft

In den Naturwissenschaften trifft man häufig Exponentialfunktionen an, und sehr oft sind sie mit der Eulerschen Zahl als Basis notiert. Einige Beispiele sollen dies verdeutlichen:

Wird ein radioaktiver Zerfall untersucht, so wird häufig die Funktion

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

notiert. In ihr ist $\lambda > 0$, und weil die Eulersche Zahl als Basis gewählt wird, ist $-\lambda < 0$ gerade der Faktor, mit dem der aktuelle Wert der Funktion multipliziert werden muss, um die Wachstumsrate zu erhalten. Es ist klar, dass dieser Faktor negativ sein muss, denn beim radioaktiven Zerfall handelt es sich ja um eine Zerfallsfunktion; die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen ist immer negativ.

Wird die Entladung eines Kondensators der Kapazität C durch einen Widerstand R untersucht, so trifft man meist auf die Funktion

$$U(t) = U_0 \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

Ist der Luftdruck von Interesse, so stösst man oft auf die barometrische Höhenformel in der Form

$$p(h) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h\right) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}.$$

Beschäftigt man sich mit der Absorption von γ-Strahlung als Funktion der Schichtdicke d des absorbierenden Materials, so begegnet man häufig einer Funktion der Art

$$I(d) = I_0 \cdot \exp(-\mu \cdot d) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot d}$$

mit einem positiven Parameter μ.

Und so weiter. Der Vorteil dieser Darstellung ist immer, dass die Wachstumsrate unmittelbar ablesbar ist. Sind also Wachstumsraten im Fokus des Interesses, so sind Exponentialfunktionen mit der Eulerschen Zahl als Basis unschlagbar.