Trigonometrie

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

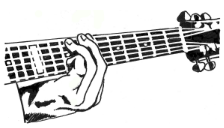
1a, 3   Armin P. Barth

1b, 2   Armin P. Barth

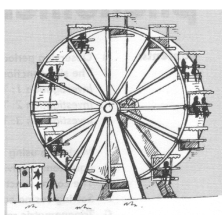
1c   Armin P. Barth

Wellen und Schwingungen

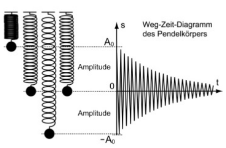
Ohne Wellen und Schwingungen könnten wir gar nichts hören. Wir wären auch nicht imstande, etwas zu sehen. Nebst Schallwellen und den Wellen des sichtbaren Lichtes sind auch andere Wellen und Schwingungen immer wieder im Alltag anzutreffen, seien es Wasserwellen in der Badewanne und in den Ozeanen, Wellen auf dem Erdboden, ausgelöst durch Erdbeben oder Explosionen, Schwingungen einer Spiralfeder oder Wellen, auf denen Mobiltelefone, Radioempfang oder Fernsehgeräte basieren.



(a) Schwingungen einer Saite



(b) Umdrehungen eines Riesenrads



(c) Federschwinger

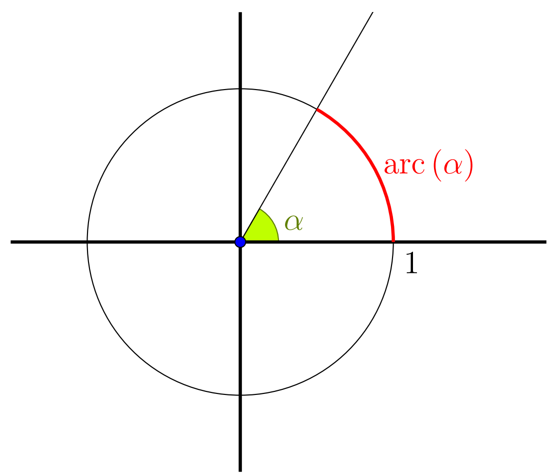
Abbildung 1: Schwingungsbeispiele

Da Wellen und Schwingungen sowohl im Alltag als auch in Naturwissenschaften und Technik von grosser Bedeutung sind, hat die Mathematik Funktionen entwickelt, mit denen sich Schwingungsprozesse gut modellieren lassen. Diese sogenannten trigonometrischen Funktionen sollen im Zentrum dieses Textes stehen.

Das Bogenmass

Wo immer in der Praxis Trigonometrie eingesetzt wird, werden mindestens zwei verschiedene Winkelmasse verwendet: das gute alte Gradmass und das Bogenmass. Beim ersten wird der Vollkreis in 360 1°-Sektoren eingeteilt, und jeder Winkel ist dann ein Bruchteil oder Vielfaches von 1°. Dieses Mass geht auf die Babylonier zurück und ist uns allen sehr geläufig; dennoch ist die Zahl 360 eigentlich willkürlich, nicht besonders nahliegend und überdies unpraktisch, sobald man höhere Mathematik betreibt. Dem Bogenmass liegt eine ganz andere Idee zugrunde.

Statt den Winkel α in Grad anzugeben, gibt man die *Bogenlänge* $\operatorname{arc}(\alpha)$ (lies: „arkus“) des Kreisbogens über α im *Einheitskreis* an. Die Einheit dieses Winkelmasses ist *rad*.



Zum Beispiel

$$\begin{aligned} 0^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 0 \text{ rad} \\ 360^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 2\pi \text{ rad} \\ 90^\circ &\mathrel{\widehat{=}} \pi/2 \text{ rad} \\ 30^\circ &\mathrel{\widehat{=}} \pi/6 \text{ rad} \end{aligned}$$

Jedem möglichen Winkel α ist eindeutig die Länge seines Bogens im Einheitskreis zugeordnet und umgekehrt. Man kann also tatsächlich ein brauchbares Winkelmass finden, wenn man Bogenlängen im Einheitskreis benutzt statt der alten Gradwinkel. Und dieses sogenannte *Bogenmass* wird grosse Vorteile haben, besonders in der Trigonometrie.

Mit einem einfachen Dreisatz finden wir die Umrechnungsformel: Wenn einem Winkel von $360°$ im Gradmass das Bogenmass 2π rad entspricht, dann entspricht einem beliebigen Winkel α im Gradmass das Bogenmass

$$\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ rad},$$

also

$$\alpha \text{ in Grad} \xrightarrow{\cdot \frac{\pi}{180^\circ}} \alpha \text{ in rad}$$

$$\alpha \text{ in Grad} \xleftarrow[\cdot \frac{180^\circ}{\pi}]{} \alpha \text{ in rad}$$

Melanie auf dem Riesenrad

Was für (neue) Funktionen eignen sich besonders gut, um Schwingungsprozesse zu modellieren? Um die zentrale Definition gut verstehen zu können, denken wir mit Vorteil an ein Riesenrad. Vielleicht hat es einen Radius von 8 Metern, und vielleicht befindet sich Melanie in einer der Kabinen und geniesst gerade die aussichtsreiche Fahrt.

Melanie könnte ihre Fahrt auf ganz unterschiedliche Arten protokollieren; zum Beispiel könnte sie aufzeichnen, wie sich die Höhe ihrer Gondel über Boden abhängig von der Zeit verhält, und sie würde dabei natürlich eine periodische Funktion erhalten. Sie könnte

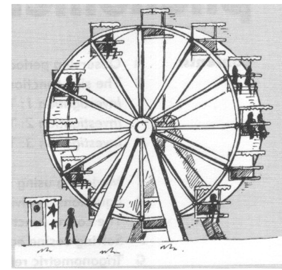
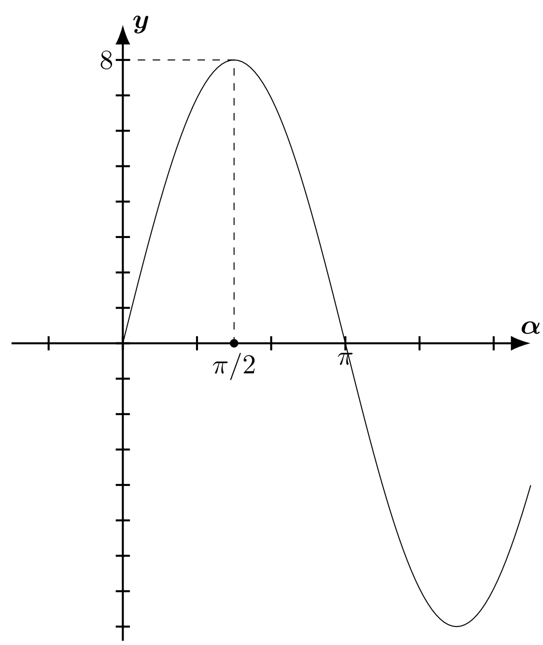


Abbildung 2: Umdrehungen eines Riesenrads

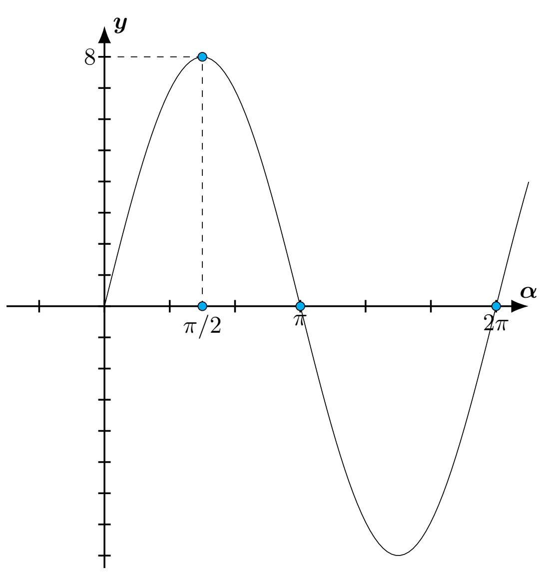
aber auch so vorgehen: Sie könnte ein (x, y)-Koordinatensystem so hineinlegen, dass der Ursprung die Nabe des Rades ist, und wenn sich ihre Gondel dann das nächste Mal an der Position $(8, 0)$ befindet, könnte sie das Bewegungsprotokoll starten: Sie könnte immer den Winkel α messen, den ihre Speiche mit der positiven x-Halbachse einschliesst, und sie könnte dann jedem solchen Winkel die y-Koordinate ihrer Gondel zuordnen. Das ergäbe etwa folgendes Bild:



An der Position $(8, 0)$ selber ist Melanies y-

Koordinate gleich 0. Dann, während der Winkel, den ihre Speiche mit der positiven x-Halbachse einschliesst, sich langsam zu $\pi/2 (\widehat{=} 90°)$ auftut, wächst ihre y-Koordinate an, erst recht schnell, dann langsamer, bis sie den maximalen Wert 8 erreicht. Im zweiten Viertel der ersten Volldrehung (während sich α zwischen $\pi/2$ und π befindet) verringert sich die y-Koordinate ihrer Gondel wieder, bis sie an der Gondel-Position $(-8, 0)$ den Wert 0 erreicht. Dann, im dritten Viertel der Volldrehung, sind die y-Werte von Melanies Gondel negativ, und so weiter.

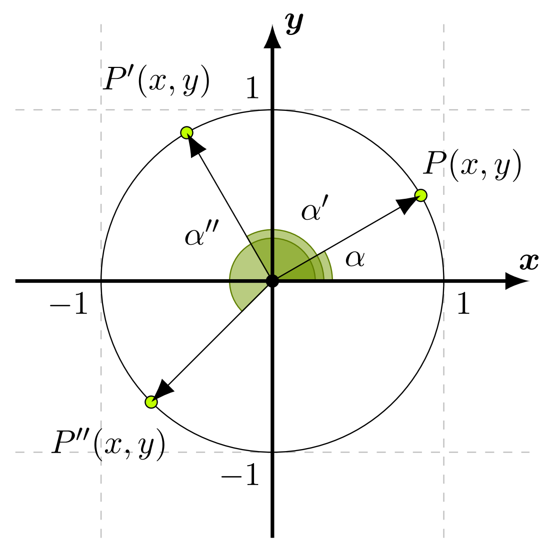
Nach der ersten vollen Drehung des Rades, wenn also α den Wert $2\pi \widehat{=} 360°$ erreicht, „fängt alles wieder von vorne an“.



Diese Vorstellung ist sehr hilfreich für das Verständnis der mathematischen Definition der trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens.

Definition am Einheitskreis

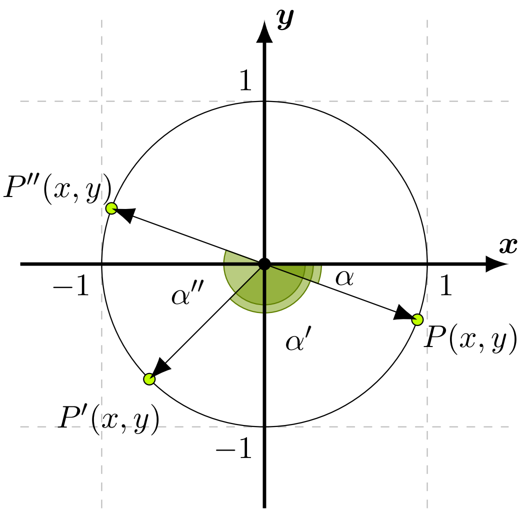
Merken wir uns gleich zu Beginn: Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens sind Namen von ganz speziellen Funktionen. Diese ordnen (fast) jedem Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zu. Um die Details gut zu verstehen, denken wir uns einen *Einheitskreis*, also einen Kreis mit Radius 1. Ein im Origo befestigter Zeiger zeigt zu Beginn auf den Punkt $(1, 0)$. Nun dreht sich der Zeiger in mathematisch positiver Richtung (Gegenuhrzeigersinn) und erzeugt dadurch jeden möglichen positiven Winkel α zwischen dem Zeiger und der positiven x-Halbachse:



$$\alpha, \alpha', \alpha'' > 0$$

Würde der Zeiger in mathematisch negativer Richtung (Uhrzeigersinn) drehen, würde er analog alle negativen Winkel erzeugen.

Selbstverständlich gibt es auch Winkel, die grösser als $2\pi \widehat{=} 360°$ sind; dazu lässt man den Zeiger nach der ersten vollen Drehung einfach weiterlaufen. Und immer bezeichne $P(x, y)$ den Endpunkt des Zeigers auf der Kreislinie.



$$\alpha, \alpha', \alpha'' < 0$$

Nun werden vier neue Funktionen wie folgt definiert:

Definition:
Die Funktion ***Sinus*** *ordnet jedem Winkel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *die* y*-Koordinate des Zeigerendpunktes zu:* $\sin(\alpha) := y$.

Die Funktion ***Cosinus*** *ordnet jedem Winkel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *die* x*-Koordinate des Zeigerendpunktes zu:* $\cos(\alpha) := x$.

Die Funktion ***Tangens*** *ordnet jedem Winkel* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2+k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *das Verhältnis* y/x *zu:* $\tan(\alpha) := y/x$.

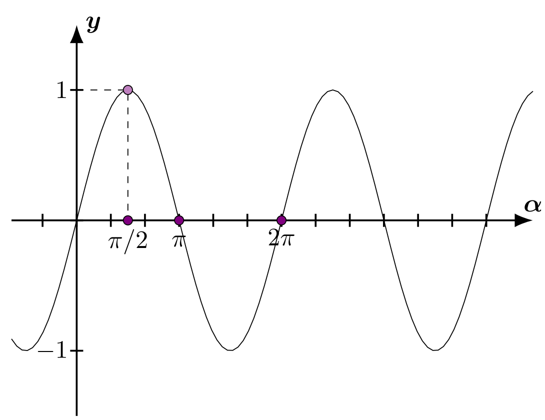
Die Funktion ***Cotangens*** *ordnet jedem Winkel* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *das Verhältnis* x/y *zu:* $\cot(\alpha) := x/y$.

Dies sind die ***trigonometrischen Funktionen****.*

Verglichen mit fast allen früher behandelten Funktionen fällt hier auf, dass wir (noch) nicht über eine Formel zur Berechnung der Funktionswerte verfügen. Die obige Definition stellt keine Formel zur Verfügung, mit der zum Beispiel zu $\alpha = 23°$ der zugehörige Sinuswert bestimmt werden kann. Alles, was wir über diesen Funktionswert bisher wissen, ist, dass er die y-Koordinate des Zeigerendpunktes ist, wenn der Zeiger mit der positiven x-Halbachse einen Winkel von $23°$ einschliesst. Wir könnten diesen Wert bisher nur grob schätzen, indem wir die Situation gut aufzeichnen. Natürlich gibt es Formeln zur Berechnung von trigonometrischen Funktionswerten, aber sie sind gar nicht so einfach zu finden. Mehr dazu später.

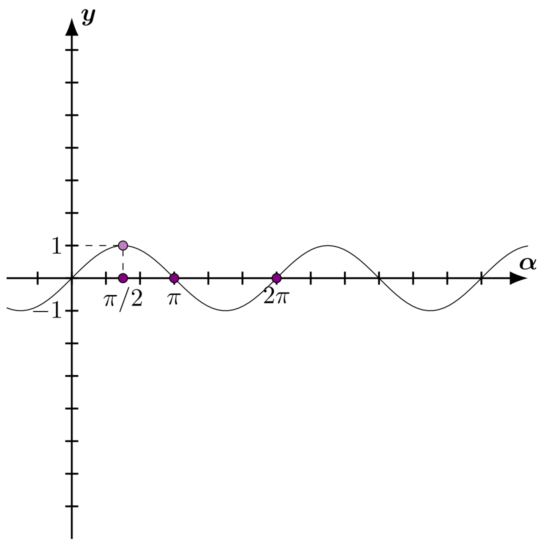
Graphen

Hätte unser Riesenrad den Radius 1 gehabt, so wäre Melanies Funktion exakt gleich der Sinusfunktion. Wir haben also schon eine klare Vorstellung vom Graphen der Funktion $\sin(\alpha)$:

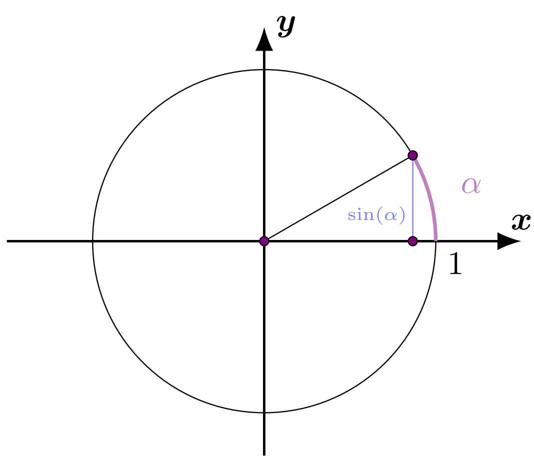


Der Erfolg ist offensichtlich; wir haben eine mathematische Funktion gewonnen, die sich gut eignet, um Schwingungen zu modellieren. Bevor wir fortfahren, lohnt sich aber ein genauerer Blick auf diesen Graphen:

Zunächst einmal: Wir zeichnen noch einmal denselben Graphen auf, diesmal aber, um ein ganz realistisches Bild zu erhalten, mit einheitlicher Skala auf beiden Achsen:



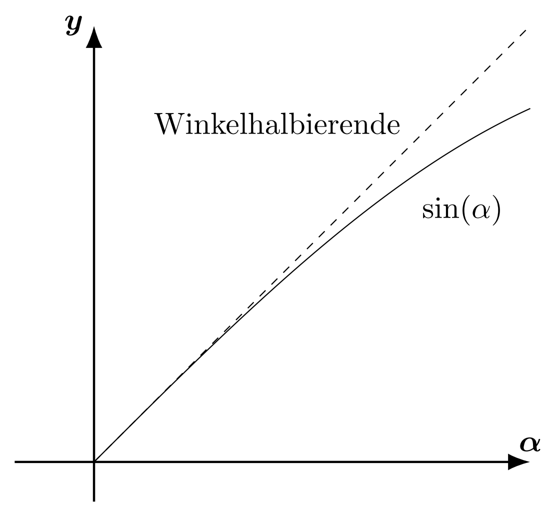
Es ist klar, dass alle Sinuswerte zwischen -1 und 1 liegen, da es y-Koordinaten von Punkten auf dem Einheitskreis sind. Und da $2\pi = 6.28\ldots$ ist, ist eine volle Schwingung von Sinus beendet, sobald der Winkel diesen Wert erreicht. Die Schwingungsdauer ist also ungefähr sechsmal so gross wie die Amplitude. Weiter:



Wenn wir erneut die Definition im Einheitskreis betrachten und bedenken, dass der Winkel im Bogenmass nichts anderes ist als die Länge des entsprechenden Bogenstücks, so wird deutlich, dass für kleine Winkel α sicherlich Folgendes gilt:

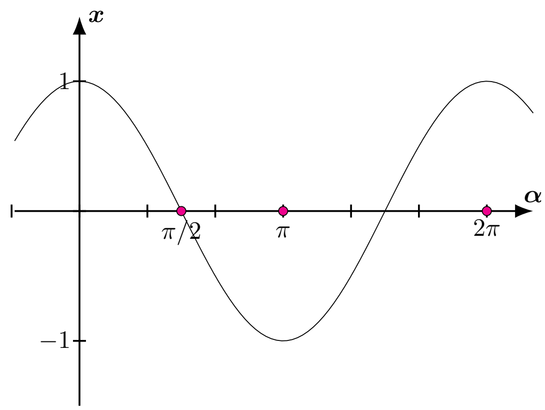
$$\sin(\alpha) \approx \alpha,$$
$$\sin(\alpha) < \alpha.$$

Das bedeutet, dass die Sinuskurve den Ursprung unter einem Winkel von 45° zur Horizontalen verlässt und dann aber unterhalb der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten verläuft:

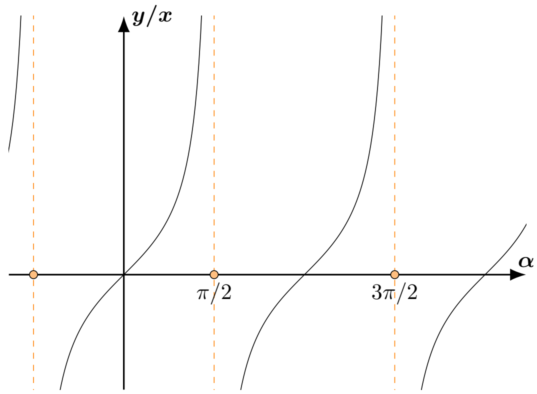


Es lohnt sich tatsächlich, sich den Verlauf dieses Graphen sehr genau einzuprägen, denn alles Folgende steht und fällt damit, wie gut wir die Definition am Einheitskreis verinnerlicht haben.

Die Funktion Cosinus ordnet jedem Winkel die x-Koordinate des Zeigerendpunktes zu. Der zugehörige Graph sieht folglich so aus - auch dies eine patente Funktion, um Schwingungen zu simulieren:

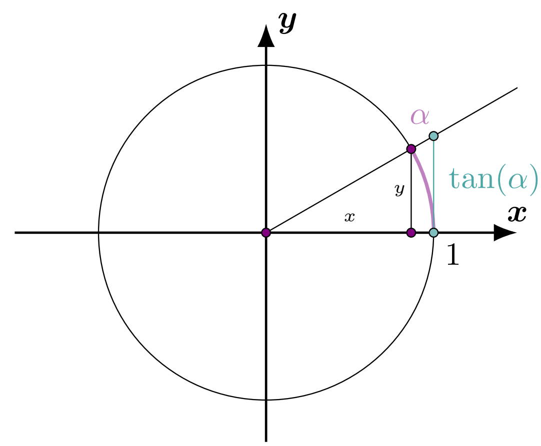


Hier ist der Graph der Tangens-Funktion:



Zu beachten sind die vertikalen Asymptoten an den Stellen $\alpha = \pi/2 + k \cdot \pi$; an diesen Stellen ist die Tangensfunktion natürlich nicht definiert, weil die x-Koordinate des Zeigerendpunktes gleich 0 ist.

Betrachten wir die Funktion für kleine positive Winkel genauer:



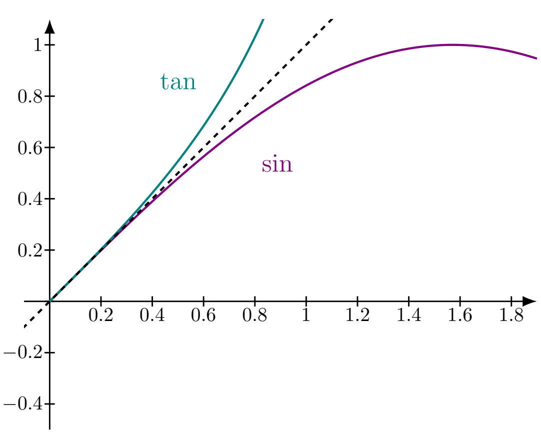
Für einen solchen Winkel ist der Tangenswert offenbar die Länge der in der Abbildung angegebenen Strecke, weil

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{1} = \frac{y}{x}.$$

Wie bei Sinus sind also auch hier für kleine Winkel der Winkel selbst und sein Tangenswert nahe beieinander. Man kann leicht einsehen, dass für kleine positive Winkel α Folgendes gilt:

$$\tan(\alpha) \approx \alpha,$$
$$\tan(\alpha) > \alpha.$$

Die Tangenskurve verlässt den Origo also ebenfalls unter 45° und verläuft dann immer oberhalb der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten:



Den Graphen der Cotangens-Funktion überlassen wir der Leserin und dem Leser als einfache Übung. Während wir mit Sinus und Cosinus nun vielversprechende Funktionen für Schwingungsprozesse in der Hand halten, ist es klar, dass wir Tangens und Cotangens für andere Zwecke einsetzen werden. Sie sind zwar ebenfalls periodisch, aber offensichtlich ungeeignet, um Schwingungen zu modellieren.

Periodizität

Bei den trigonometrischen Funktionen handelt es sich um *periodische* Funktionen, also um Funktionen, bei denen sich ein lokales Verhalten in immer gleichen Abständen identisch wiederholt. Der Graph sieht dann so aus, als ob man ganze Teile der Kurve immer wieder kopiert. Solche Funktionen werden *periodisch* genannt und der Abstand, bis sich ein Abschnitt einer Kurve wiederholt, heisst *Periode* der Funktion. Genauer:

Definition:
Eine Funktion f heisst ***periodisch mit Periode*** *P, genau dann wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt*

$$f(x+P) = f(x).$$

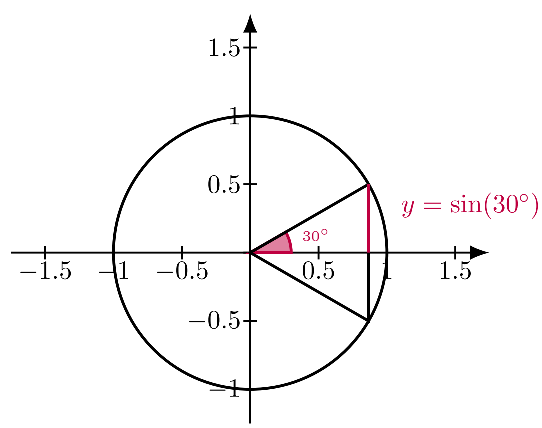
Offenbar haben Sinus und Cosinus je eine Periode von $P = 2\pi$, während Tangens und Cotangens je eine Periode von $P = \pi$ haben. Freilich wird an dieser Stelle auch sehr klar, dass Sinus und Cosinus offenbar noch sehr unflexibel sind. Wir können ja nicht von allen Schwingungen, die in der Praxis vorkommen, erwarten, dass sie eine Schwingungsdauer von 2π und eine Amplitude von 1 haben. Es wird also später auch darum gehen müssen, diese Funktionen „flexibler zu gestalten“...

Einige Funktionswerte

Obwohl wir (noch) keine Formel zur Berechnung beliebiger Funktionswerte trigonometrischer Funktionen haben, können wir sie doch für einige wenige ausgewählte Winkel bestimmen, indem wir elementare Geometrie verwenden.

Beispielsweise ist klar, dass $\sin(0) = 0$ sein muss, da bei Winkel $0°$ der Zeiger den Endpunkt $(1, 0)$ hat und somit $y = 0$ ist.

Mit geringfügig grösserem Aufwand finden wir, dass $\sin(30°) = 0.5$ - oder im Bogenmass $\sin(\pi/6) = 0.5$ - sein muss. Das lässt sich so einsehen:



Winkelüberlegungen zeigen, dass das abgebildete Dreieck gleichseitig sein muss. $\sin(30°)$ ist aber die Länge der halben Dreiecksseite, also 0.5.

Auf ähnliche (und immer elementare) Weise kann man alle folgenden Funktionswerte herleiten:

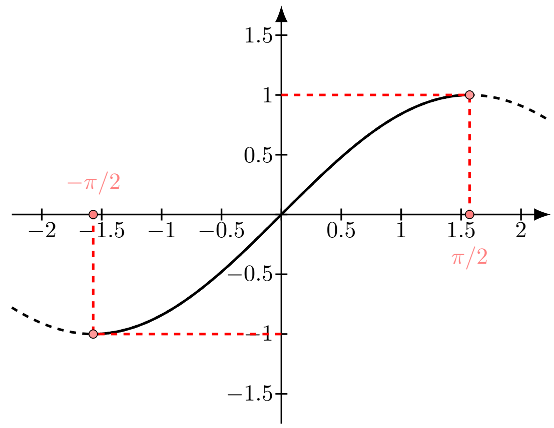
	$0°$ $\widehat{=}0$	$30°$ $\widehat{=}\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\widehat{=}\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\widehat{=}\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\widehat{=}\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undef.
$\cot(\alpha)$	undef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Umkehrfunktionen

Es ist offensichtlich, dass die trigonometrischen Funktionen nicht bijektiv sind; es handelt sich ja um periodische Funktionen, und dieser Begriff macht schon deutlich, dass die Funktionswerte immer wiederkehrend sind. Man kann aber zweifellos bijektive Ausschnitte der trigonometrischen Funktionen wählen, und über solchen ist dann die Umkehrfunktion jeweils definiert. Es ist natürlich sehr nützlich, Umkehrfunktionen zu besitzen, weil man dann von einem beliebig vorgegebenen Funktionswert wenigstens auf einen Winkel (und wegen der Periodizität sogar auf alle!) zurückschliessen kann, der diesen Funktionswert hat. Man muss aber wissen, welche bijektiven Ausschnitte gemeint sind, wenn man von den Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen spricht.

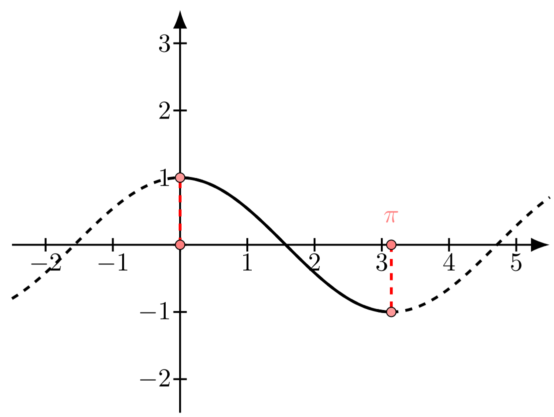
Merke:

Sinus ist im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ bijektiv:



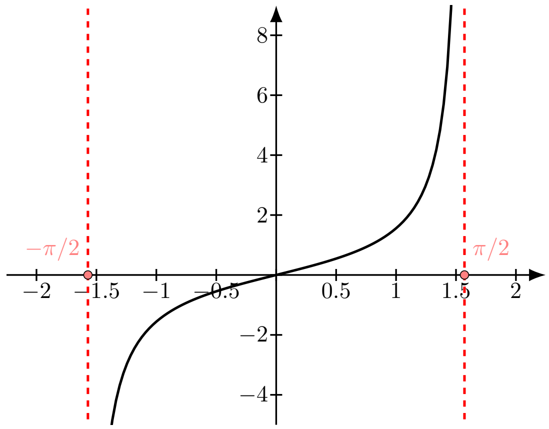
Die Umkehrfunktion heisst **arcsin** (lies: „arkus sinus“) oder $\mathbf{sin^{-1}}$. Sie ordnet jeder reellen Zahl $r \in [-1, 1]$ denjenigen Winkel $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ zu, für den $\sin(\alpha) = r$ gilt. Freilich gibt es ausserhalb dieses Intervalls unendlich viele weitere Winkel mit demselben Funktionswert.

Cosinus ist im Intervall $[0, \pi]$ bijektiv:



Die Umkehrfunktion heisst **arccos** (lies: „arkus kosinus“) oder $\mathbf{cos^{-1}}$. Sie ordnet jeder reellen Zahl $r \in [-1, 1]$ denjenigen Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zu, für den $\cos(\alpha) = r$ gilt. Freilich gibt es ausserhalb dieses Intervalls unendlich viele weitere Winkel mit demselben Funktionswert.

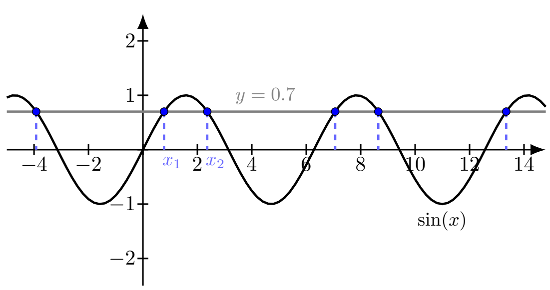
Tangens ist im Intervall $]-\pi/2, \pi/2[$ bijektiv:



Die Umkehrfunktion heisst **arctan** (lies: „arkus tangens“) oder $\mathbf{tan^{-1}}$. Sie ordnet jeder reellen Zahl $r \in [-1, 1]$ denjenigen Winkel $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ zu, für den $\tan(\alpha) = r$ gilt. Freilich gibt es ausserhalb dieses Intervalls unendlich viele weitere Winkel mit demselben Funktionswert.

Eine wichtige Frage: Wie beantwortet man Fragen der Art „Was ist die Lösungsmenge von $\sin(x) = 0.7$“?

Zunächst ist klar, dass es nicht nur einen einzigen Winkel gibt, der diese Gleichung erfüllt. Aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion muss es sogar unendlich viele solche Winkel geben. Wie können wir alle finden und angeben? Eine Graphik macht die Situation klarer:



Die Umkehrfunktion arcsin (oder $\sin^{-1}$) liefert einen einzigen Winkel mit der verlangten Eigenschaft, nämlich immer denjenigen Winkel, der sich im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ befindet, in diesem Fall also den Winkel x_1. Wir benutzen also den Taschenrechner und tippen

$$\sin^{-1}(0.7);$$

und wir finden den Winkel $x_1 = 0.775$ rad bzw. $x_1 = 44.427°$, je nachdem, welches Winkelmass wir gerade bevorzugen. Der nächst grössere Winkel, der die Ausgangsgleichung erfüllt, ist x_2. Wie bestimmen wir ihn? Nun, die Sinuskurve ist sicher symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse durch $x = \pi/2$. Wenn wir an die Definition im Einheitskreis denken, so wird ja auch einsichtig, dass die Winkel x und $\pi - x$ denselben Sinuswert haben müssen. Folglich ist $x_2 = \pi - x_1$ bzw. $x_2 = 180° - x_1$. In Zahlen finden wir $x_2 = 2.366$ rad bzw. $x_2 = 135.573°$.

Alle unendlich vielen weiteren Winkel bestimmen wir nun elegant aus der Periodizität der Funktion. Anschaulich ausgedrückt: Zu x_1 können wir ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von 2π bzw. $360°$ addieren und erreichen immer eine weitere Lösung der Gleichung, nämlich alle Winkel auf den „linken Hügelseiten“. Addieren wir aber zu x_2 ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von 2π bzw. $360°$, so gelangen wir zu allen restlichen Lösungen, nämlich zu den Winkeln auf den „rechten Hügelseiten“. Insgesamt ist also

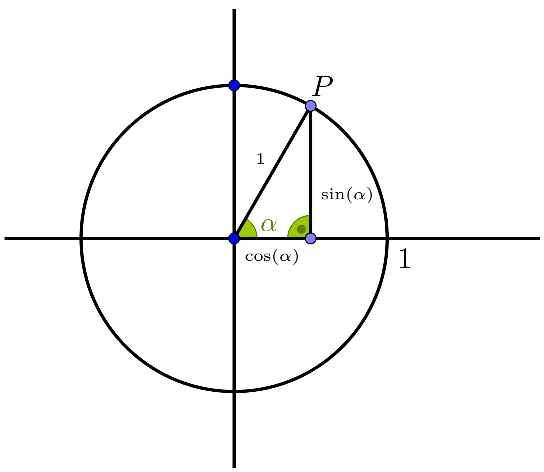
$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{array}{ll} 0.775 \text{ rad } + k \cdot 2\pi, & \\ 2.366 \text{ rad } + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

beziehungsweise im Gradmass

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{array}{ll} 44.427° + k \cdot 360°, & \\ 135.573° + k \cdot 360°, & k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}.$$

Einige elementare Formeln

Aus der Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis können wir unmittelbar einige elementare Beziehungen ablesen:



Offenbar gilt für alle Winkel, für die diese Terme jeweils definiert sind:

> **Allgemeine Beziehungen**
>
> $$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha), \qquad \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \cot(\alpha)$$
>
> und
>
> $$\tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1.$$

Diese drei Identitäten folgen unmittelbar aus der Definition der trigonometrischen Funktionen. Unter Zuhilfenahme des Satzes von Pythagoras findet man zudem eine wichtige Gleichung.

> **Trigonometrischer Phytagoras**
>
> $$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Hierbei muss unbedingt die Schreibweise beachtet werden: Wir sollten ja eigentlich

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$$

schreiben; um Schreibaufwand zu sparen, wird dies aber meistens so notiert:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Das ist keinesfalls so zu verstehen, dass etwa das „n“ in „sin“ (bzw. das „s“ in „cos“) quadriert wird, und auch nicht so, dass „sin“ (bzw. „cos“) quadriert wird, was ja beides keinerlei Sinn hätte, sondern dass der Funktionswert quadriert wird.

Mit Hilfe dieser elementaren Beziehungen kann man leicht weitere oftmals nützliche Gleichungen herleiten, wie etwa:

> **Weitere allgemeine Beziehungen**
>
> $$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)},$$
> $$1 + \cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)},$$
> $$\sin^4(\alpha) - \cos^4(\alpha) = \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)$$
>
> und so weiter.

Ebenfalls aus der Definition am Einheitskreis kann man ganz einfach Formeln über Symmetrien, Phasenverschiebungen sowie Rückführung auf spitze Winkel entwickeln:

Formeln über Symmetrien

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha),\\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha),\\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha),\\ \cot(-\alpha) &= -\cot(\alpha).\end{aligned}$$

Formeln über Phasenverschiebungen

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\alpha),\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(\alpha),\\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot(\alpha),\\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan(\alpha).\end{aligned}$$

Formeln über die Rückführung auf spitze Winkel

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \sin(\pi-\alpha),\\ \cos(\alpha) &= -\cos(\pi-\alpha),\\ \tan(\alpha) &= -\tan(\pi-\alpha).\end{aligned}$$

Geschichte der Trigonometrie

Die Herleitung der Trigonometrie via Schwingungen und Einheitskreis-Definition stimmt nicht mit der tatsächlichen historischen Entwicklung überein. Historisch gesehen war die Trigonometrie in der Antike genau das, was das Wort seiner Bedeutung nach aussagt: *Dreiecks-Messung*. Wir haben hier aber einen anderen Weg eingeschlagen, weil es erfahrungsgemäss viel einfacher ist, das bisher über Trigonometrie Gelernte sozusagen auf Dreiecke zu „verengen“, als umgekehrt allein für Dreiecke gemachte Trigonometrie nachher auf beliebige Winkel „ausweiten“ zu müssen.

Es gibt keinen genau datierbaren Anfang der Trigonometrie. Wie viele andere mathematische Entdeckungen hat auch diese zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen antiken, menschlichen Hochkulturen stattgefunden. So findet man Vorläufer der Trigonometrie bereits in den ersten uns tradierten mathematischen Quellen überhaupt: im ägyptischen „Papyrus Rhind“ (ca. 1650 v. Chr.) und auf einzelnen babylonischen Tontafeln (1900 – 1600 v. Chr.).

Die Ägypter setzten Trigonometrie u.a. in der Architektur ein; so wurde dem Steinmetz die Neigung einer Pyramidenfläche durch ein Verhältnis zweier Streckenlängen angegeben, das wohl unserem heutigen Cotangens entspricht. Die Wissenschaftler Babyloniens waren für die damaligen Verhältnisse hervorragende Astronomen, und wir glauben zu wissen, dass ein grosser Teil des babylonischen astronomischen Wissens an die Wissenschaftler der klassischen Griechenlands weitergegeben wurde. Diese frühe Astronomie war es, die den Grundstein legte für die Entwicklung der modernen Trigonometrie.

Die Griechen (ca. 500 – 100 v. Chr.) waren es, die die Mathematik als abstrakte, theoretische, systematische und beweisende Wissenschaft zu praktizieren begannen, während man sich vorher damit zufrieden gab, immer andere Methoden zur Bewältigung immer anderer konkreter praktischer Probleme zu finden. Unter den Griechen aber wuchs die Trigonometrie zu einer tiefen, vielseitigen und praxisnahen mathematischen Theorie heran.

Einige wichtige Stationen der griechischen Trigonometrie:

> Aristarch von Samos (ca. 310 – 230): Bestimmung des Verhältnisses der Distanzen zwischen Sonne, Mond und Erde.
>
> Hipparch von Nikäa (um 150 v. Chr.): Den Kommentaren von Theon von Alexandria (4. nachchristliches Jahrhundert) ist zu entnehmen, dass Hipparch die Trigonometrie hervorragend beherrscht haben soll. Hipparch tabellierte den Zusammenhang zwischen Zentriwinkel und zugehöriger Sehnenlänge im Kreis.
>
> Claudius Ptolemaios (ca. 85 – 165 n. Chr.): Ptolemaios schuf eine Tabelle von Sinus-Werten, die wahrscheinlich auf eine entsprechende Tabelle von Hipparch zurückgeht. Ein Grund dafür, dass der grösste Teil der griechischen Astronomie verschwunden (uns also nicht überliefert) ist, liegt möglicherweise darin, dass Ptolemaios ein Werk geschrieben hat, das alle früheren in den Schatten stellte und daher überflüssig machte: die „Syntaxis Mathematica“. Spätere Kommentatoren haben das Werk kurz als „magiste“ („grösstes“) bezeichnet, und arabische Übersetzer haben noch den arabischen Artikel „al“ als Präfix angefügt; und deshalb heisst das Werk heute nur noch „Almagest“.

Nach der griechischen Klassik waren es vor allem die Araber, die das enorme Wissen der Griechen pflegten und weiterentwickelten; sie übersetzten und machten die grossen mathematischen Werke Griechenlands, Indiens und Chinas nutzbar. Durch die arabische „Vermittlerrolle“ kam dieses Wissen schliesslich auch zu uns ins Abendland. An die arabische Vermittlerrolle werden wir immer erinnert, wenn wir den Begriff Sinus benutzen. Er entstand aus dem indischen Wort für „Sehne“, jiva, durch eine Fehlübersetzung: Die Araber lasen jiba und schrieben aber jb, weil das Arabische keine Vokale kennt. Dieses Kürzel missinterpretierten die lateinischen Übersetzen als jaib, was arabisch Brust, Busen bedeutet, und ersetzten das Wort durch ihr eigenes Wort für Brust, Busen, nämlich sinus. So wanderte also der Begriff ebenso wie der Inhalt, für den er steht, langsam von den Indern über die Araber bis zu uns ins Abendland.

In der Mathematik der islamischen Länder nahm die Trigonometrie einen breiten Raum ein; sie bildete das Zwischenglied, das die Mathematik mit der führenden Naturwissenschaft jener Zeit, der Astronomie, ferner mit dem Kalenderwesen und der Gnomonik, der Lehre von der Sonnenuhr, verband. Letztere war auf Grund des meist sonnigen Wetters in den islamischen Ländern weit verbreitet. Abgesehen von der Astronomie und der Gnomonik fand die Trigonometrie Anwendung in der Berechnung der Richtung nach Mekka, der Heimatstadt Mohammeds; diese Richtung wurde in jeder Moschee durch eine besondere Nische, „Kibla“ genannt, angezeigt. Ein interessantes Beispiel für die Anwendung der Trigonometrie in den islamischen Ländern ist die erste Bestimmung der Atmosphärenhöhe durch Ibn al-Haitam: Er errechnete eine Atmosphärenhöhe von $10-12$ km, einen von der wahren Grösse weit entfernten Wert. Der Grund des Fehlers war unter anderem, dass al-

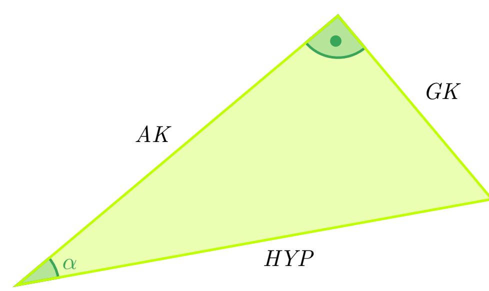
Haitam die Obergrenze der Atmosphäre mit der Höhe der sichtbaren Wolken gleichsetzte; gleichwohl ist seine Berechnung ein trigonometrisches Kleinod.

Ab dem 11. Jahrhundert begannen die Hauptstücke der griechischen Wissenschaft im Abendland bekannt zu werden. Man hatte natürlich Kontakte zu Byzanz, von wo immer wieder antike Schriften nach Westen gelangten; im grossen Ausmass erreichte uns das antike Wissen aber erst, nachdem die Christen den Süden von Spanien von den Arabern zurückerobert hatten. Besonders in Toledo (erobert 1085) fiel den Christen fast die gesamte arabische wissenschaftliche Literatur in die Hände. Man brauchte sich nicht mehr um einzelne Schriften zu bemühen - jetzt hatte man sie alle und begann, sie zu übersetzen. Es entstanden eigentliche Übersetzungszentren. Das wichtigste im 12. Jahrhundert befand sich in Toledo, wo Gerhard von Cremona (1114 – 1187) und andere Hunderte von Übersetzungen anfertigten. Cremona allein übersetzte 71 astronomische, mathematische, philosophische und medizinische Werke, darunter die „Canones sive regulae super tabulas toletanas“ von al-Zarqali. Dieses Werk hatte auf die Astronomie und die Trigonometrie des Abendlandes einen grossen Einfluss. Leicht vereinfachend kann man sagen, dass die abendländische Trigonometrie mit dieser Übersetzung ihren Anfang nahm.

Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Erstaunlicherweise eignen sich trigonometrische Funktionen ganz hervorragend, um geometrische Probleme im Zusammenhang mit Dreiecken zu lösen. Das ist nicht sofort einleuchtend, handelt sich bei Sinus, Kosinus, Tangens doch um periodische Funktionen. Wie soll das gehen? Bei genauem Hinsehen wird das sofort klar. Um weniger umständlich formulieren zu müssen, führen wir vorher noch neue Begriffe ein, die sich gleich als nützlich herausstellen werden:

Definition:
In einem rechtwinkligen Dreieck wird die längste (dem rechten Winkel gegenüber liegende) Seite stets ***Hypotenuse*** *(HYP) genannt. Die beiden anderen Seiten sind die* ***Katheten****.*

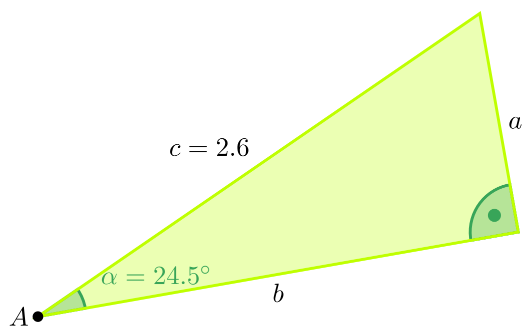


Hat man nun speziell einen der nicht rechten Winkel im Visier, sagen wir etwa α, so können die beiden Katheten offenbar unterschieden werden: Diejenige Kathete, die dem Winkel gegenüber liegt, heisst ***Gegenkathete*** *(GK). Die andere, die auf einem der beiden Winkelschenkel und somit „an dem Winkel“ liegt, heisst* ***Ankathete*** *(AK).*

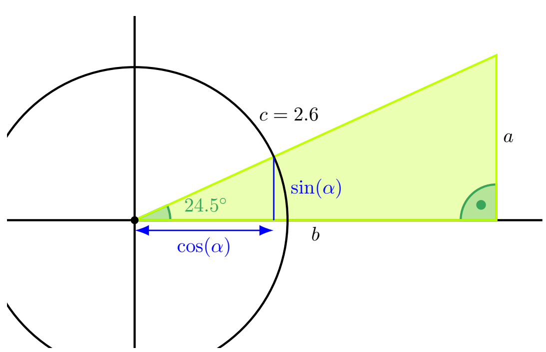
Um Missverständnisse zu verhindern: Wenn wir statt des eben betrachteten Winkels α den anderen nicht-rechten Winkel ins Auge fassen, so wird diejenige Kathete, die vorher AK war, natürlich zur neuen GK, und die Kathete, die vorher GK war, wird nun zur neuen AK. Die

Begriffe An- und Gegenkathete sind also relativ in Bezug auf den gerade betrachteten Winkel.

Nun sind wir in der Lage zu verstehen, weshalb Trigonometrie die Dreiecksgeometrie revolutioniert. Nehmen wir dazu an, wir stehen vor folgendem Problem:



Wir kennen in einem rechtwinkligen Dreieck den Winkel α sowie die Länge der Hypotenuse. Wir kennen aber die beiden Katheten noch nicht. Und alle bisher erarbeiteten Geometriekenntnisse eröffnen keinen Weg zur Lösung. Was also tun? Ganz einfach: Wir drehen und schieben das Dreieck so, dass die Ecke A auf den Mittelpunkt des Einheitskreises und die Ecke C auf die Abszisse zu liegen kommt:



Offenbar entsteht eine (in diesem Fall) verkleinerte Kopie des Originaldreiecks innerhalb des Einheitskreises. Die Kopie und das Original sind natürlich ähnlich, da einander entsprechende Winkel identisch sind. Wir können also die Strahlensätze (oder Ähnlichkeitssätze) benutzen, um hilfreiche Verhältnisgleichungen aufzustellen:

Zum einen gilt sicher

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{1}$$

oder

$$\frac{a}{2.6} = \sin(24.5°).$$

Daraus ergibt sich sofort $a = 2.6 \cdot \sin(24.5°) = 1.078\ldots$ ergibt. Zum anderen ist

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos(\alpha)}{1}$$

oder

$$\frac{b}{2.6} = \cos(24.5°)$$

woraus sich $b = 2.6 \cdot \cos(24.5°) = 2.365\ldots$ ergibt. Man hätte b aber auch so bestimmen können:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha),$$

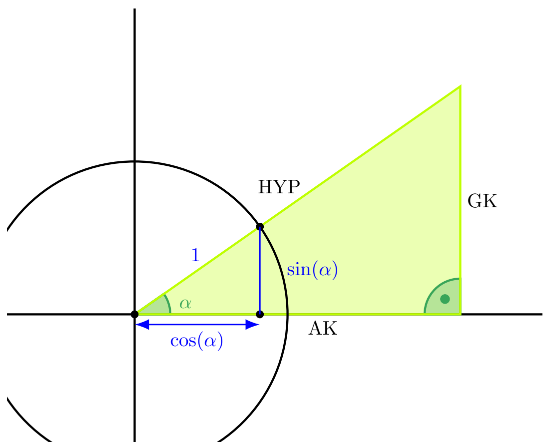
also

$$b = \frac{a}{\tan(\alpha)} = \frac{1.078\ldots}{\tan(24.5°)} = 2.365\ldots$$

Das ganze Geheimnis liegt also darin, geeignete Verhältnisse des Originaldreiecks auf die Kopie im Einheitskreis zu übertragen, um von dort die Kraft der trigonometrischen Funktionen zu gewinnen.

Es ist wichtig, die hier beispielhaft geschilderte Beziehung zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Dreiecksgeometrie gut zu verstehen. Hat man das aber einmal verstanden, kann man den Weg abkürzen. Man kann die Beziehung zwischen den trigonometrischen Funktionen und Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreieck gewissermassen ein für alle Mal zementieren, um dann nicht jedes Mal den Weg über den Einheitskreis beschreiten zu müssen. Dazu entwickeln wir folgende Erkenntnis:

Betrachtet man ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, und bezeichnet α einen der beiden nicht-rechten Winkel, so gilt aufgrund der Strahlensätze (oder Ähnlichkeitssätze):



Das Verhältnis der (Länge der) Ankathete zur (Länge der) Hypotenuse ist gleich dem Verhältnis von $\cos(\alpha)$ zu 1. Das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse ist gleich dem Verhältnis von $\sin(\alpha)$ zu 1. Und das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete ist gleich dem Verhältnis von $\sin(\alpha)$ zu $\cos(\alpha)$, also gleich $\tan(\alpha)$.

Merke:

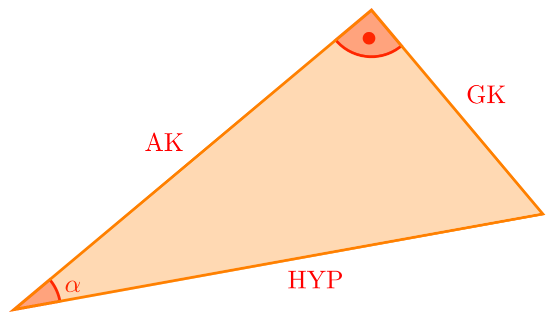
Ist α einer der beiden nicht-rechten Winkel im rechtwinkligen Dreieck, so gilt:

$$\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{HYP}} = \sin(\alpha)$$

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{HYP}} = \cos(\alpha)$$

$$\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{AK}} = \tan(\alpha)$$

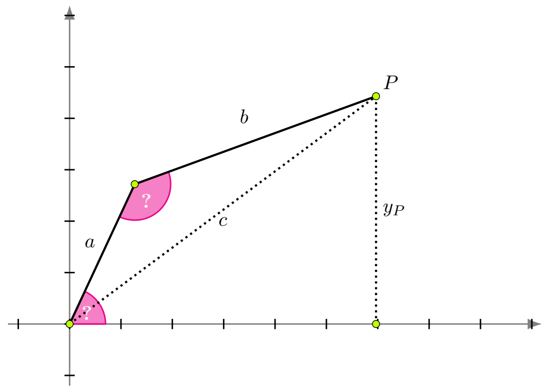
$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{GK}} = \cot(\alpha)$$



Damit wird Dreiecksgeometrie sehr viel einfacher. Aus zwei gegebenen Seitenlängen lässt sich immer ein Winkel berechnen, aus einem Winkel und einer Seitenlänge lässt sich eine weitere Seitenlänge bestimmen, und so weiter.

Sinus- und Cosinussatz

Bei weitem nicht alle in der Praxis vorkommenden Dreiecke sind rechtwinklig. Betrachten wir nur einmal das folgende Beispiel aus der Robotik: Ein zweigelenkiger Roboterarm soll einen an der Stelle P befindlichen Gegenstand ergreifen. Wenn die Länge a des „Oberarms“ und die Länge b des „Unterarms“ gegeben sind, wie müssen die mit Fragezeichen bezeichneten Winkel dann gewählt werden, damit das Ergreifen des Gegenstandes gelingt?



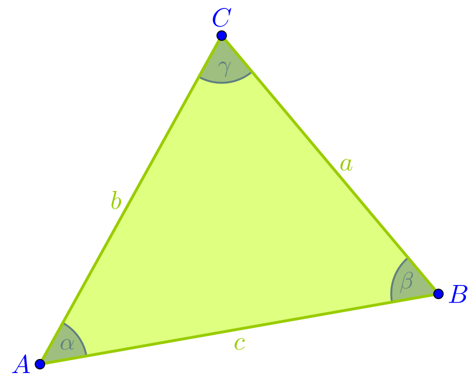
Wir haben es hier offenbar mit einer Geometrieaufgabe zu tun, bei der in einem nicht-rechtwinkligen Dreieck alle drei Seitenlängen gegeben sind - c lässt sich ja aus den Koordinaten von P berechnen. Und wir sollten daraus einen der drei Winkel berechnen können. Hierfür versagen offenbar alle bisher hergeleiteten Sätze. Wir brauchen also neue geometrische Sätze und zwar solche, die uns in nicht-rechtwinkligen Dreiecken weiterhelfen. Setzen wir uns also zum Ziel, Sätze zu finden und zu beweisen, die in beliebigen (also auch in nicht-rechtwinkligen) Dreiecken Zusammenhänge aufzeigen zwischen Winkeln und Seitenlängen. Wenden wir uns zuerst dem Sinussatz zu:

Satz: (Sinussatz)
Im beliebigen Dreieck ABC gilt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{c}$$

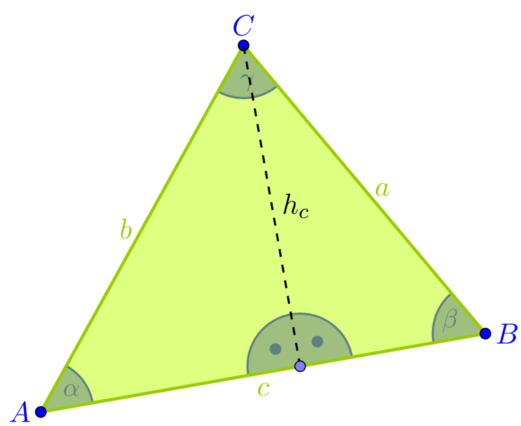
$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{c}$$



Das Verhältnis zweier Seitenlängen entspricht dem Verhältnis der Sinuswerte der entsprechenden Winkel. Oft wird dieser Satz auch als fortlaufende Proportion notiert:

$$\sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma) = a : b : c$$

Wir beweisen nur die erste Verhältnisgleichung; die beiden anderen können analog nachgewiesen werden. Und wir beschränken uns auf den Fall, dass α spitzwinklig ist; den anderen Fall überlassen wir der Leserin oder dem Leser als einfache Übung.



Beweis. Zeichnen wir noch die Höhe auf c ein, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke. In jedem dieser rechtwinkligen Dreiecke können wir die schon wohlbekannte Trigonometrie für rechtwinklige Dreiecke anwenden. Damit gilt dann einerseits

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$$

und andererseits

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}.$$

Kombiniert man beide Erkenntnisse, so erhält man sofort das gewünschte Resultat:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\frac{h_c}{b}}{\frac{h_c}{a}} = \frac{h_c}{b} \cdot \frac{a}{h_c} = \frac{a}{b}.$$

□

Versetzt uns der Sinussatz nun in die Lage, in einem beliebigen Dreieck alle möglichen Problemstellungen im Zusammenhang mit Seitenlängen und Winkeln erfolgreich zu lösen? Wie können denn solche Problemstellungen aussehen? Nun, falls alle drei Winkel bekannt sind, aber keine Seitenlänge gegeben ist, ist das Dreieck gar nicht eindeutig bestimmt. Eine solche Problemstellung wäre also nicht sinnvoll. Es könnten aber zwei (und damit sogar drei) Winkel sowie eine Seitenlänge gegeben sein. Und es könnten zweitens nur ein Winkel und dafür aber zwei Seitenlängen gegeben sein. Und es könnten drittens die drei Seiten, aber kein einziger Winkel gegeben sein. Hilft der Sinussatz in jedem dieser Fälle?

Man kann sich leicht überlegen, dass der Sinussatz nicht hilft, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Und natürlich auch nicht, wenn drei Seiten und kein Winkel bekannt sind. Wir brauchen also tatsächlich noch einen weiteren Satz, der diese Fälle abdeckt. Im *Cosinussatz* werden wir fündig:

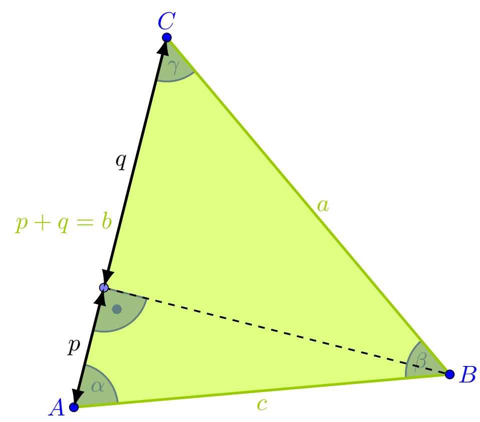
Satz: (Cosinussatz)
Im beliebigen Dreieck ABC gilt:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos(\beta) \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Welche Idee steckt hinter dem Cosinussatz? Der Satz des Pythagoras ist wohl der bekannteste mathematische Satz überhaupt; und bestimmt haben viele Menschen schon bedauert, dass er nur in rechtwinkligen Dreiecken gilt. Wäre es nicht toll, einen „pythagoras-ähnlichen Satz“ zu haben, der in jedem Dreieck, also auch einem nicht-rechtwinkligen, gilt? Das müsste natürlich ein Satz sein, der ebenfalls die Quadrate der drei Seitenlängen in Beziehung setzt - der aber zudem der eventuellen Nicht-Rechtwinkligkeit Rechnung trägt. Es müsste also ein Satz der Art

$$c^2 = a^2 + b^2 + \textit{ Korrekturterm}$$

sein, in dem der Korrekturterm verschwindet, sobald das Dreieck rechtwinklig ist, in allen anderen Fällen aber für den nötigen Ausgleich sorgt. Es ist plausibel, dass $\cos(\gamma)$ in diesem Korrekturterm vorkommt, denn der Cosinus ist tatsächlich 0 für 90°. Der fertige Cosinussatz wird also eine Verallgemeinerung des Pythagoras sein und letzteren überflüssig machen.



Herleitung: Wiederum beschränken wir uns auf ein Dreieck mit spitzem Winkel α und überlassen den anderen Fall der Leserin oder dem Leser als einfache Übung. Im Hinblick auf unser Ziel ist es sinnvoll, mit c^2 zu beginnen. Was können wir über c^2 aussagen? Nach Pythagoras (dem originalen Satz) ist

$$c^2 = h_b^2 + p^2.$$

Nun ersetzen wir einfach die unerwünschten Ausdrücke durch erwünschte und kommen leicht ans Ziel:

$$\begin{aligned} c^2 &= h_b^2 + p^2 \\ &= (a^2 - q^2) + p^2 \\ &= a^2 - q^2 + (b-q)^2 \\ &= a^2 - q^2 + b^2 - 2b \cdot q + q^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2b \cdot q \\ &= a^2 + b^2 - 2b \cdot a \cdot \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Damit haben wir also eingesehen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot a \cdot \cos(\gamma)$ Wenn man mit anderen Höhen arbeitet, erhält man zwei weitere Sätze, die dazu analog aufgebaut sind. Insgesamt ergibt sich somit genau das Behauptete.

Additionstheoreme

Ziel dieses Abschnittes ist es, einige weitere nützliche Zusammenhänge zwischen den einzelnen trigonometrischen Funktionen kurz zu erwähnen. Zuerst geht es um die sogenannten *Additionstheoreme*. Eines dieser Theoreme lautet:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Welche Bedeutung hat dieses Theorem? Zum einen erlaubt es, den Sinus einer Summe (oder Differenz) aufzuspalten in Sinus- und Cosinuswerte der einzelnen Winkel. Wir werden ab und zu Situationen antreffen, in denen eine solche Aufspaltung überaus willkommen ist.

Ursprünglich aber dienten die Additionstheoreme vor allem dem Berechnen von Funktionswerten. Erinnern wir uns, dass es uns nach der Definition im Einheitskreis nur gelungen ist, einige wenige Funktionswerte trigonometrischer Funktionen exakt zu berechnen, nämlich die Werte für $0°, 30°, 45°, 60°$ und $90°$? Weitere Werte können wir (ausser mit Hilfe von Technologie) bisher nicht bestimmen, es fehlen uns noch immer die Funktionsgleichungen bzw. Formeln.

Ebenso erging es den Mathematikern der griechischen Antike, die sich als erste mit Trigonometrie auseinandergesetzt hatten. Und in Ermangelung von Technologie mussten sie andere Wege finden, weitere Funktionswerte trigonometrischer Funktionen zu berechnen. Da stellten die Additionstheoreme eine willkommene Hilfe dar: Nehmen wir einmal an, wir möchten den Sinuswert an der Stelle $15°$ berechnen, verfügen zur Zeit aber nur über die Werte an den Stellen $0°, 30°, 45°, 60°$ und $90°$. Wie kann das gelingen?

Ganz einfach, wir schreiben den Input $15°$ einfach als $60° + (-45°)$ und setzen ihn in obige

Formel ein:

$$\begin{aligned}\sin(15^\circ) &= \sin\left(60^\circ + (-45^\circ)\right)\\ &= \sin(60^\circ)\cdot\cos(-45^\circ)\\ &\quad + \cos(60^\circ)\cdot\sin(-45^\circ)\end{aligned}$$

Mit Hilfe der schon bekannten Funktionswerte und den weiter oben thematisierten Symmetrieüberlegungen sind wir nun in der Lage, der Sinuswert von 15° exakt zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\sin(15^\circ) &= \sin\left(60^\circ + (-45^\circ)\right)\\ &= \sin(60^\circ)\cdot\cos(-45^\circ)\\ &\quad + \cos(60^\circ)\cdot\sin(-45^\circ)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Elegant, oder!?

Freilich brauchen wir heute die Additionstheoreme nicht mehr aus dem hier geschilderten Grund; dennoch werden sich uns immer wieder Anwendungsbereiche auftun.

Wir verzichten in diesem Rahmen auf die Herleitung der Additionstheoreme und stellen sie stattdessen einfach in einem Kasten zusammen:

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}\end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen können viele weitere nützliche trigonometrische Formeln gewonnen werden. Es ist vielleicht nicht sinnvoll, sie auswendig zu lernen, aber es ist nützlich, wenigstens um ihre Existenz und ihre Form zu wissen. Hier sind einige weitere Formeln: Formeln über doppelte Winkel, Formeln über halbe Winkel und Formeln über dreifache Winkel:

Formeln für doppelte Winkel

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

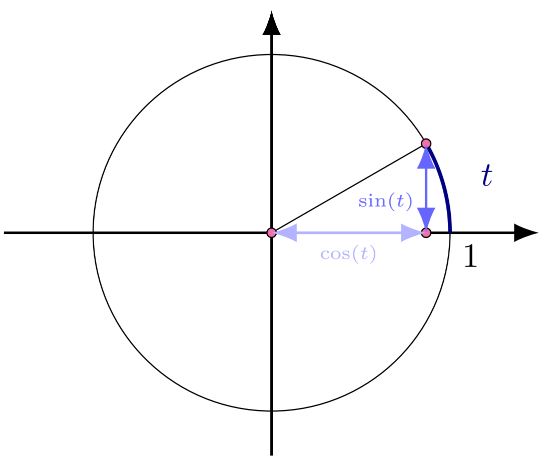
Für halbe / dreifache Winkel

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos(\alpha)}{2}\\ \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1+\cos(\alpha)}{2}\\ \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= 3\sin(\alpha)-4\sin^3(\alpha)\\ \cos(3\alpha) &= 4\cos^3(\alpha)-3\cos(\alpha)\\ \tan(3\alpha) &= \frac{3\tan(\alpha)-\tan^3(\alpha)}{1-3\tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

Harmonische Schwingungen

Zum Schluss kehren wir zurück zu den Schwingungen. Wir hatten Sinus und Cosinus ja mit dem Ziel definiert, Schwingungsprozesse mathematisch modellieren zu können. Und wir hatten festgestellt, dass sich diese Funktionen hierfür tatsächlich wunderbar eignen, dass sie aber noch nicht flexibel genug sind. Was wir dringend benötigen, ist eine Möglichkeit, die wichtigsten Parameter einer Schwingung bedarfsgerecht anzupassen. Genau das soll hier geschehen. Bevor wir das aber anschauen, soll noch betont werden, dass man als Variable der trigonometrischen Funktionen oft auch x oder t wählt, zum Beispiel, weil die Zeit (*tempus* t) bei einer Schwingung eine wichtige Rolle spielt. Wenn man dies tut, muss man natürlich festhalten, dass man mit x respektive t nicht die x-Koordinate des Zeigerendpunktes meint, sondern eben den Winkel.



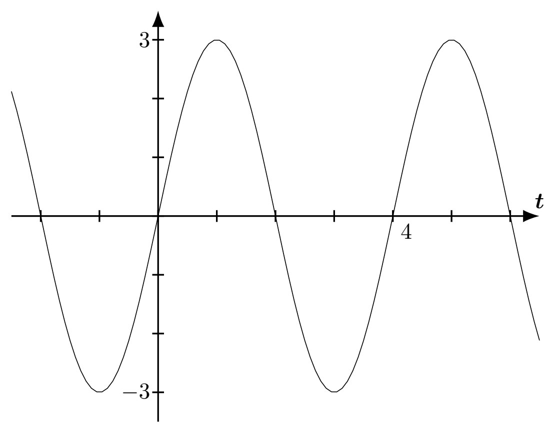
Stellen wir uns jetzt einmal vor, wir müssten eine Schwingung formal ausdrücken, deren Amplitude 3 und deren Periode 4 ist. Wir denken sofort an die Funktion

$$f_1 : t \mapsto \sin(t),$$

stellen aber fest, dass hier die Amplitude 1 und die Periode 2π misst. Was tun? Die Amplitude 3 erreichen wir ganz einfach, indem wir der Sinusfunktion den Faktor 3 voranstellen. Damit die Funktion genau zum Zeitpunkt $t = 4$ die erste volle Schwingung beendet hat und eben nicht erst zum Zeitpunkt $t = 2\pi$, müssen wir die Zeit t offenbar mit dem Faktor $2\pi/4 = \pi/2$ versehen:

$$f_2 : t \mapsto 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right).$$

Setzt man jetzt für t den Wert 4 ein, so wird das Argument der Funktion f_2 gleich 2π sein, und eben zu diesem Zeitpunkt (für diesen Winkel) hat Sinus eine volle Periode beendet. Der Graph zeigt, dass wir erfolgreich waren:



Drücken wir das alles gleich allgemeiner aus:

Um die *Amplitude* (maximale Elongation) A zu erreichen, stellen wir den Faktor A vor die Sinus-Funktion:

$$f : t \mapsto A \cdot \sin(t), \qquad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dies nennt man eine *Amplitudenmodulation*. Dabei streckt der Faktor A alle bereits berechneten Sinuswerte für $A > 1$. Falls $0 < A < 1$, werden die Sinuswerte gestaucht. Ist A negativ, findet zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse statt.

In der folgenden Abbildung wird der Graph der Funktionen

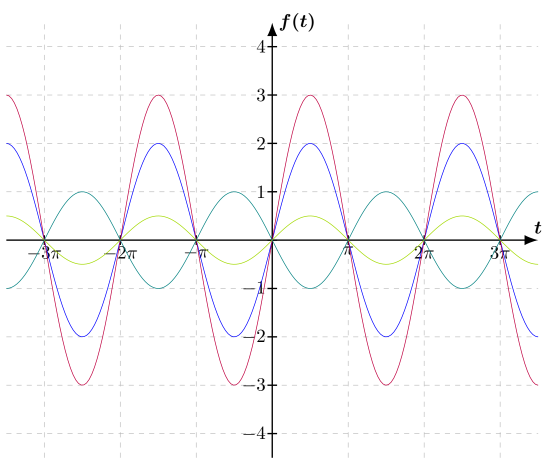
$f_1(t) = 2 \cdot \sin(t)$ in blau,

$f_2(t) = 3 \cdot \sin(t)$ in purpur,

$f_3(t) = 0.5 \cdot \sin(t)$ in grün,

$f_4(t) = -\sin(t)$ in dunkeltürkis

skizziert.



In Autoradios kann noch immer das Symbol „AM“ entdeckt werden. Dabei werden Radiosender mit einer Amplitudenmodulation gesucht. Bei Instrumenten beeinflusst die Amplituden-Modulation die Lautstärke eines Tons.

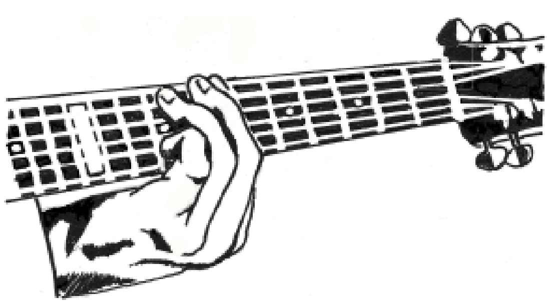


Abbildung 3: Schwingungen einer Saite

Um eine beliebige Periode oder *Schwingungsdauer* T zu erreichen, müssen wir die Zeit t mit dem Faktor $2\pi/T$ versehen, damit das Argument der Funktion genau zum Zeitpunkt T den Wert 2π annimmt:

$$f : t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right), \qquad T \neq 0.$$

Dies nennt man *Frequenzmodulation*, was aber sofort erklärt werden muss:

Die Frequenzmodulation verändert die Periode und damit die „Geschwindigkeit“ der Schwingung. Dabei soll dieser Begriff genauer definiert werden: Ordnet man nicht einem Winkel, sondern einer Zeit einen Sinuswert zu, so kann die *Periode* P einer Sinusfunktion als Zeit interpretiert werden, die für eine volle Auf- und Ab-Bewegung einer Feder oder eine volle Umdrehung eines Rades, etc. verwendet wird. Diese Zeitdauer wird auch *Schwingungsdauer* T genannt. Somit gilt:

$$T = P$$

Als „Geschwindigkeit“ einer Schwingung kann man den Winkel betrachten, der im Einheitskreis pro Zeiteinheit durchlaufen wird. Der Einsatz des Winkels als Geschwindigkeitsmass eignet sich hier ausgezeichnet, da dieser auch bei Kreisen mit anderen Radien, also unterschiedlicher Amplitude, gleich bleibt. Wenn pro Zeiteinheit immer derselbe Winkel zurückgelegt wird, ist die sogenannte Winkelgeschwindigkeit ω konstant und kann somit aus dem vollen Umfangswinkel im Bogenmass (2π) und der vollen Umlaufszeit (Schwingungsdauer T) berechnet werden. Es gilt dann:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

bzw.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Der Wert ω wird *Winkelgeschwindigkeit* oder *Kreisfrequenz* genannt.

Die *Frequenz* F bezeichnet die Anzahl der Umdrehungen eines Rades oder die Anzahl Auf- und Ab-Bewegungen einer Feder, etc. pro Zeiteinheit. Wenn ein Rad also beispielsweise 4 Sekunden benötigt für eine volle Umdrehung, dann durchläuft das Rad in einer Sekunde 1/4 einer vollen Umdrehung, hat also eine Frequenz von 1/4. Benötigt ein Rad aber nur 1/4 Sekunde für eine volle Umdrehung, so werden nach einer Sekunde bereits 4 Umdrehungen realisiert, und es hat eine Frequenz von 4. Somit kann für die Frequenz einer Schwingung die folgende Gesetzmässigkeit notiert werden:

$$F = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

und

$$\omega = 2\pi \cdot F.$$

Offensichtlich hängt die Frequenz einer Schwingung von der Winkelgeschwindigkeit bzw. der Schwingungsdauer ab und umgekehrt. Abschliessend stellen wir fest, dass man die Frequenzmodulation auch so ausdrücken kann:

$$f : t \mapsto \sin(\omega \cdot t), \qquad \omega \neq 0.$$

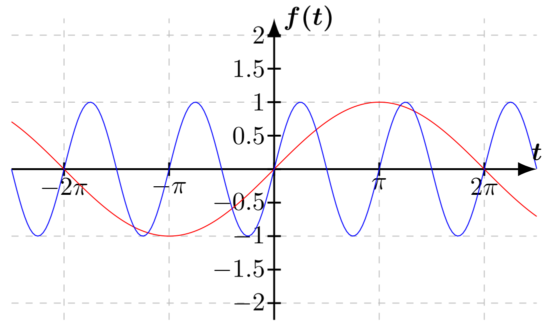
Dabei wird die Sinus-Kurve in x-Richtung gestreckt ($0 < \omega < 1$) oder auch gestaucht ($\omega > 1$), da das beobachtete Objekt „langsamer“ bzw. „schneller“ schwingt In der folgenden Abbildung werden die Graphen der Funktionen

$$f_1(t) = \sin(0.5 \cdot t)$$

in rot und

$$f_2(t) = \sin(2 \cdot t)$$

in blau skizziert:



In Autoradios kann noch immer das Symbol „FM“ entdeckt werden. Dabei werden Radiosender mit einer Frequenz-Modulation gesucht. Bei Instrumenten beeinflusst die Frequenz-Modulation die Höhe eines Tons.

Da nicht jede Schwingung mit dem Wert $f(0) = 0$ beginnt, sollte es auch möglich sein, Schwingungen, die entlang der x-Achse verschoben werden, mit einem Funktionsterm darzustellen. Eine sogenannte *Phasen-Verschiebung* verändert die Amplitude und Frequenz einer Schwingung aber nicht, jedoch den Startwert der Schwingung zum Zeitpunkt $t = 0$. Formal:

$$f : t \mapsto \sin(t + \varphi)$$

Hier kann einmal mehr etwas Interessantes beobachtet werden: Nehmen wir dazu einmal $\varphi > 0$ an, und vergleichen wir die Graphen von

$$f : t \mapsto \sin(t + \varphi)$$

und von

$$g : t \mapsto \sin(t)$$

miteinander. Die Funktion f hat an der Stelle t denjenigen Wert, den die Funktion g erst an der *späteren* Stelle $t + \varphi$ hat. Daher ist der Graph von f gegenüber dem Graphen von g um φ Einheiten nach links verschoben. Es mag auf den ersten Blick kontra-intuitiv sein, dass sich eine Kurve nach links (resp. rechts) verschiebt, wenn man zur Variablen t eine positive (resp. negative) Zahl addiert. Obige Überlegung macht diesen Punkt aber völlig klar.

Merke:

Für positive Werte der Phase φ wird die Sinusschwingung nach links verschoben. Ist hingegen φ negativ, so verschiebt sich der Funktionsgraph der Sinusschwingung nach rechts.

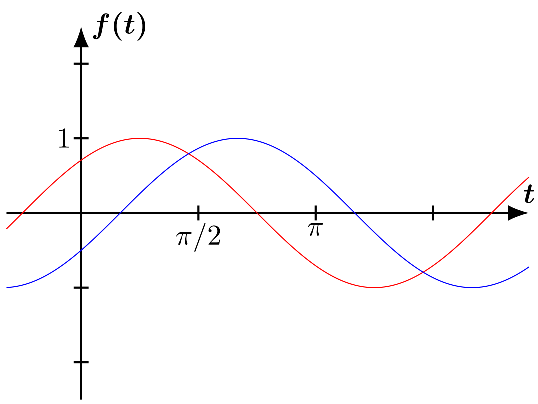
In der folgenden Abbildung wird der Graph der Funktion

$$f_1(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

in rot und der Graph der Funktion

$$f_2(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$$

in blau skizziert:



Indem wir nun mit der klassischen Sinusfunktion sowohl Amplituden-, also auch Frequenzmodulation und darüber hinaus auch noch eine Phasenverschiebung durchführen, können wir sie flexibel an die Parameter einer real beobachteten Schwingung anpassen und diese Schwingung somit erfolgreich modellieren. Stattet man Sinus zusätzlich mit diesen Möglichkeiten aus, so nennt man das die *harmonische Schwingung*:

$$f : t \mapsto A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$