TECHNISCHE MECHANIK

thherzog@ethz.ch
https://n.ethz.ch/~thherzog

Kolloquium 4

1) Freiheitsgrade

2) Starrkörperformel, Kinemate und Bewegungsarten

Freiheitsgrad

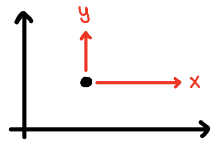
Anzahl unabhängiger Bewegungen, die ein Körper / System ausführen kann

Beispiele: (einzelne Körper, ohne Bindungen)

- 2D Punkt:

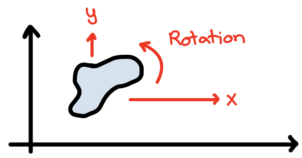
  Keine Rotation, da der Punkt keine Ausdehnung hat und so nichts am Zustand verändert wird

  $f = 2$



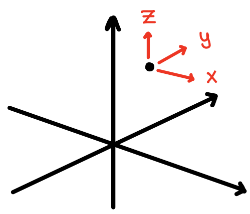
- 2D Starrkörper:

  $f = 3$



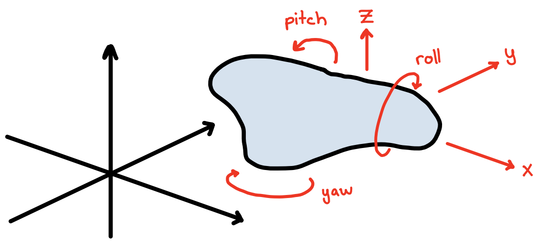
- 3D Punkt:

  $f = 3$



- 3D Starrkörper:

  $f = 6$



Ein 3D Starrkörper kann sich in all diese Richtungen bewegen bzw. ist die Bewegung eine Kombination von diesen 6 Richtungen

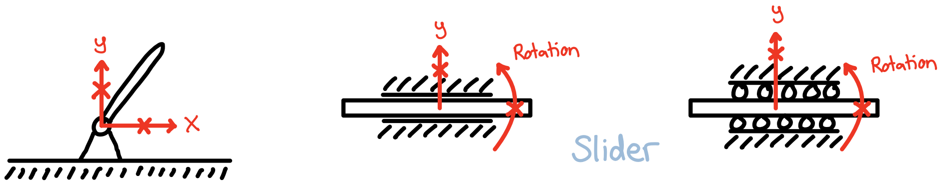
Bindungen:

Bindungen beschränken Systeme in ihren Bewegungen

(b=1)

Auflager

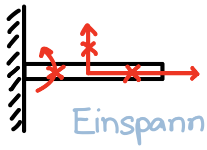
(b=2)



Gelenk am Boden

Slider

(b=3)

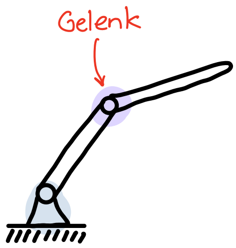


Einspannung

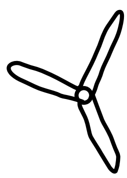
Gelenke:

$$\boxed{b = (\text{Anzahl verbundener Starrkörper} - 1) \cdot 2}$$

$b = 2 - 1 = 2$



$b = 2 + (2-1) \cdot 2 = 4$



$b = (3-1) \cdot 2 = 4$

Wir können nun die Bestimmung des Freiheitsgrades eines Systems mit mehreren Körpern mathematisch bestimmen

$$\boxed{f = n - b}$$

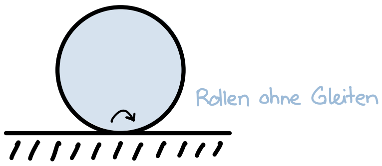
n: Summe der Freiheitsgrade aller Körper

b: Anzahl (linear unabhängiger) Bindungsgleichungen

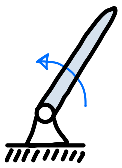
(Bindungen reduzieren den Freiheitsgrad des Systems!)

„Wieviele Arten von Bewegungen werden eingeschränkt?"

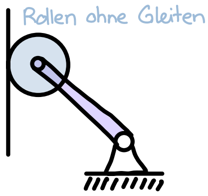
Beispiele:



$n = 3$ und $b = 2 \rightarrow f = 3 - 2 = 1$



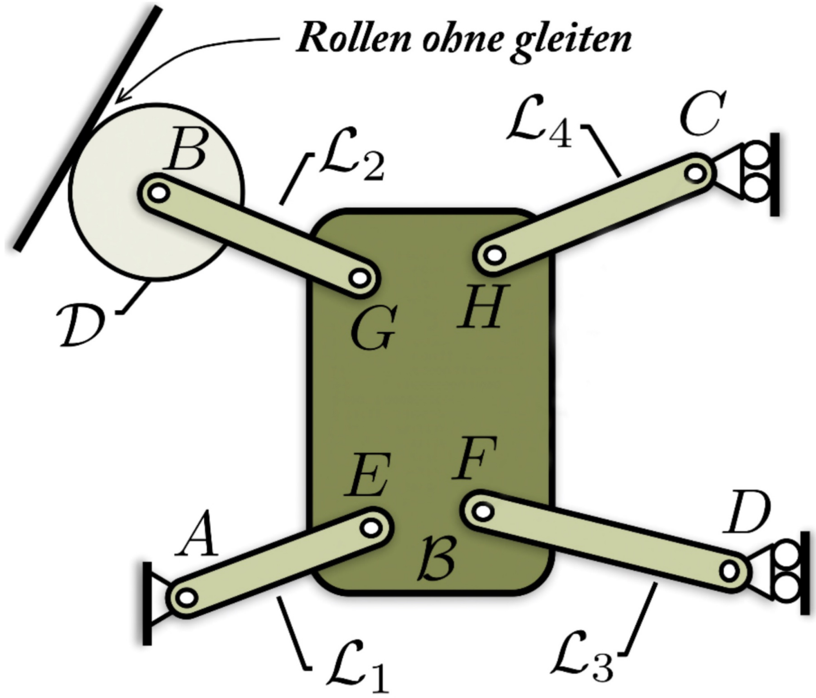
$n = 3$ und $b = 2 \rightarrow f = 3 - 2 = 1$



$$\left.\begin{array}{l} n = 3 + 3 = 6 \\ b = 2 + 2 + 2 = 6 \end{array}\right\} f = 6 - 6 = 0$$

CLICKER

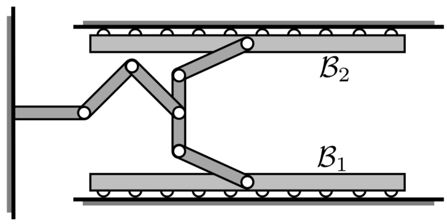
Was ist der Freiheitsgrad des Systems?



CLICKER

Was ist der Freiheitsgrad des Systems?

Das abgebildete System besteht aus 6 starren Stäben und 2 Blöcken $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$, die gelenkig miteinander verbunden sind. Der linke Stab ist mit einer Einspannung an der Wand gelagert. Die beiden Blöcke sind jeweils am Boden bzw. an der Decke rollend gelagert, d.h. sie können sich nur in horizontaler Richtung bewegen.



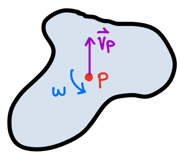
Starrkörperformel

Die Starrkörperformel muss für alle räumlichen Bewegungen erfüllt sein

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}} \xrightarrow{\text{Bedeutung}} \vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_B}_{\text{Translationskomponente}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}}_{\text{Rotationskomponente}}$$

Kinemate

Die Kinemate beschreibt die Starrkörperbewegung komplett
(Sie ist immer auf einen Punkt bezogen)



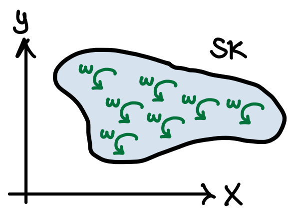
Kinemate von Punkt P: $\boxed{\{\vec{v}_P, \vec{\omega}\}}$

Invariante

Invarianten des Starrkörpers sind für jeden Punkt gleich

1. Invariante: $\boxed{I_1 = \vec{\omega}}$

2. Invariante: $\boxed{I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_P}$



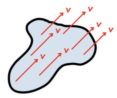
Durch die Invarianten können wir nun die Bewegungsart bestimmen...

Bewegungsarten

$I_1 = 0, I_2 = 0$: $\vec{\omega} \stackrel{!}{=} 0$ => Translation oder Stillstand

Translation: Alle Geschwindigkeiten sind parallel und gleich gross

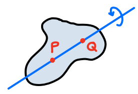
$$\boxed{v_P = v \quad \forall P \in K}$$



$I_1 \neq 0, I_2 = 0$: $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_P \stackrel{!}{=} 0$ => reine Rotation

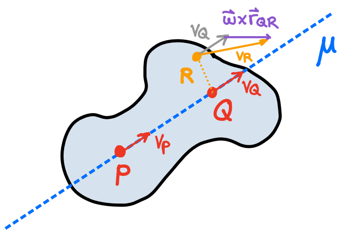
Rotation: Es existiert eine Rotationsachse, auf der alle Geschwindigkeiten gleich null sind

$$\boxed{\exists P, Q \in K \text{ s.d. } v_P = 0 \wedge v_Q = 0}$$



$I_1 \neq 0, I_2 \neq 0$: Schraubung

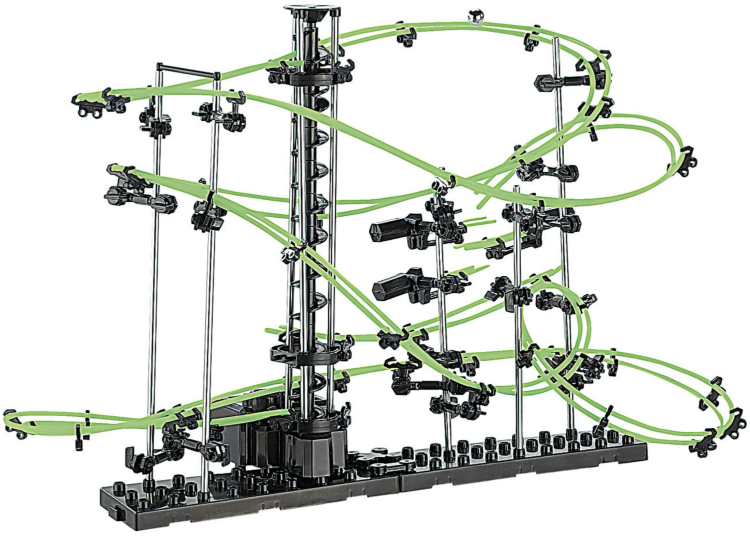
(Überlagerung einer Rotation mit einer Translation in Richtung der Rotationsachse)

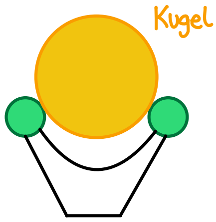


Alle Punkte auf μ haben die gleiche Geschwindigkeit!

AUFGABE

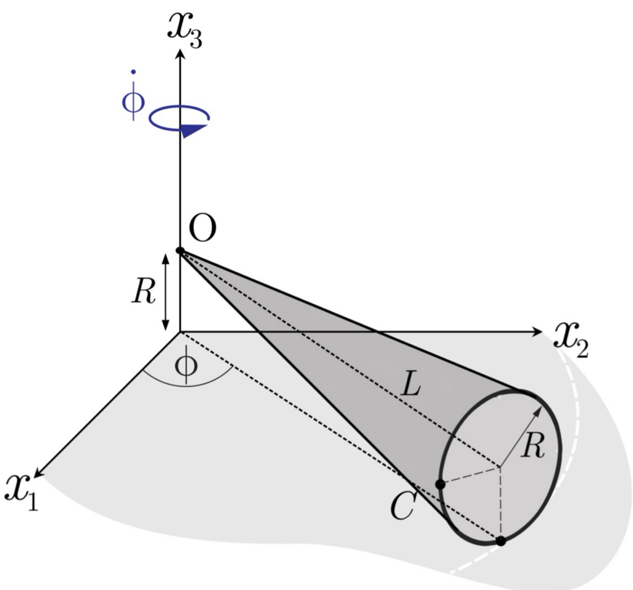
Wo befindet sich die Rotationsachse?





AUFGABE

Wo befindet sich die Rotationsachse?



CLICKER

Wo befindet sich die Rotationsachse?