Technische Mechanik

thherzog@ethz.ch

https://n.ethz.ch/~thherzog

Kolloquium 2

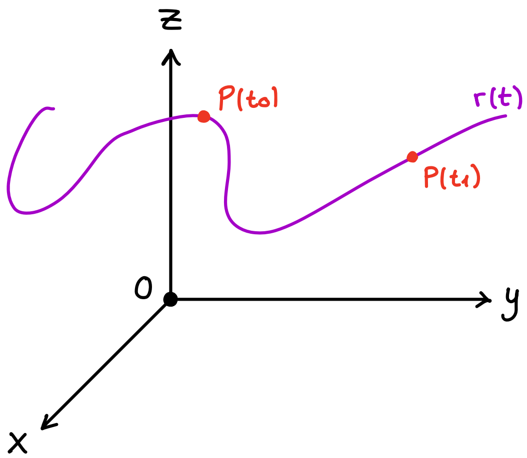
1) Bahnkurven

2) Schnelligkeit und Geschwindigkeit

3) Koordinatensysteme:
   - kartesische Koordinaten
   - Polarkoordinaten
   - Zylinderkoordinaten

Bahnkurven

Ein Punkt im Raum, der sich bewegt, kann durch seine **Bewegungsgleichung** beschrieben werden.

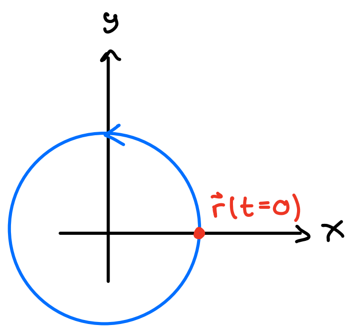


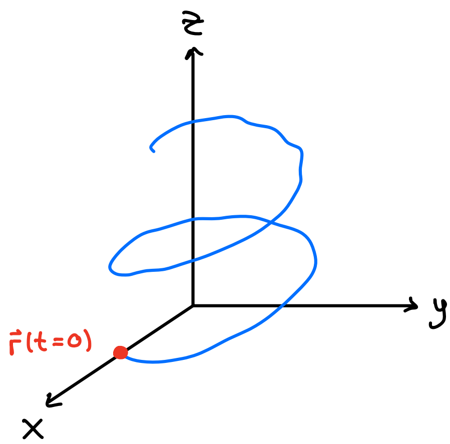
Beispiel:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix} = \cos(t)\vec{e}_x + \sin(t)\vec{e}_y + t\vec{e}_z$$

Welche Bahnkurve beschreibt diese Funktion?

$\Rightarrow$ Eine Spirale





Aufgabe:

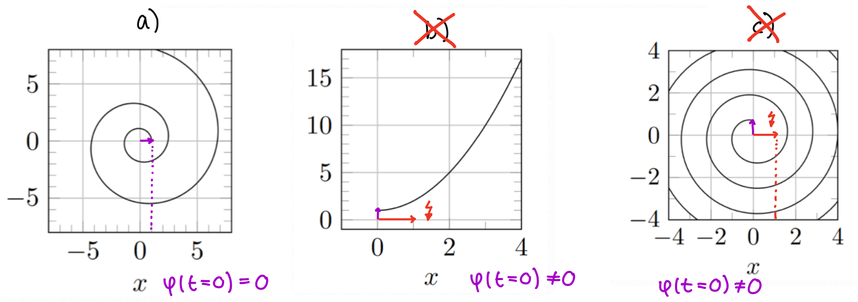
Eine Bahnkurve in der Ebene ist durch folgende Parametrisierung in Polarkoordinaten gegeben:

$\rho(t) = 1 + t^2$

$\phi(t) = at$

wobei $a = \frac{5}{3}\pi$ **und** $t \geq 0$.

Welches der folgenden Diagramme ist die richtige Darstellung der Bahnkurve?



Kochrezept:

1) Grössen verstehen: polar & Start bei $t=0$

2) $t \geq 0$ einsetzen, mit $t=0$ starten

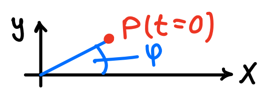
$t=0$: $\rho(0) = 1$ und $\varphi(0) = 0$

$\Downarrow$

$\overline{OP(t=0)} \stackrel{!}{=} 1$

Punkt bei $t=0$ muss 1 vom Ursprung entfernt sein

$\Downarrow$



Der Punkt muss auf der x-Achse liegen!

Geschwindigkeit

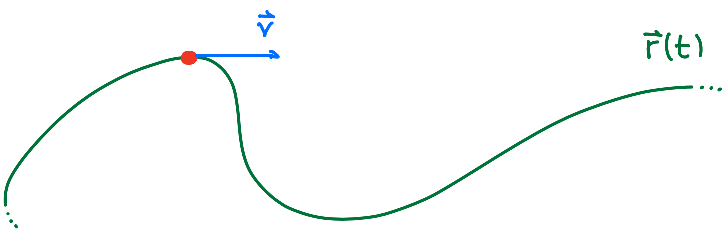
Bewegungsgleichung

Zeitliche Ableitung des (zeitlich abhängigen) Ortsvektors

Formeln

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \end{bmatrix}}$$

⚠ Die Geschwindigkeit ist tangential zur Bahnkurve!



Aufgabe:

Ein materieller Punkt hat die folgende Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten:

$$r(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \\ cos(t) \end{pmatrix}$$

Was ist die Geschwindigkeit dieses Punktes?

Schnelligkeit

Formel

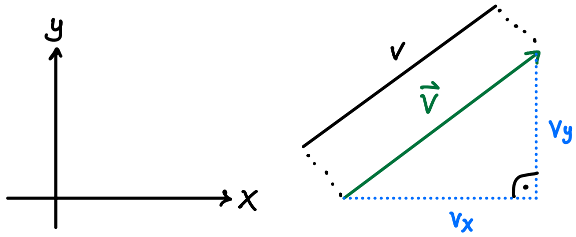
$$\boxed{v(t) = |\vec{v}(t)|}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit:

In 2D: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

In 3D: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

⚠ Geometrisch: Die Schnelligkeit ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors



Aufgabe:

Ein materieller Punkt hat die folgende Bewegungsgleichung:

$y(t) = x^3(t)$

$x(t_1) = \frac{1}{2}$

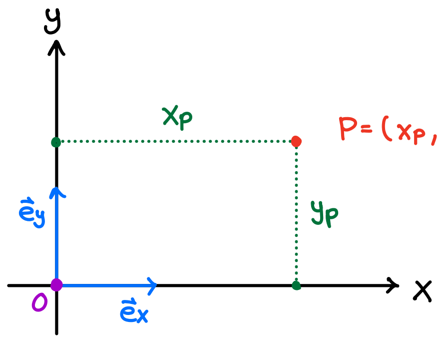
$\dot{x}(t_1) = 4$

Was ist die Schnelligkeit dieses Punktes zum Zeitpunkt t_1?

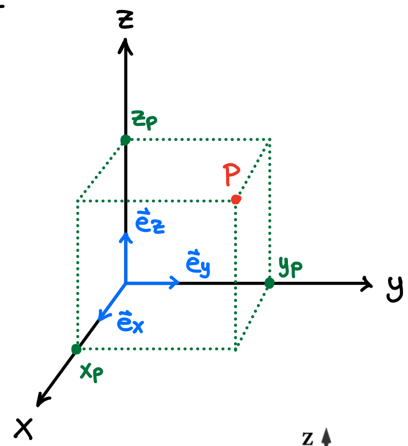
Koordinatensysteme

① kartesische Koordinaten

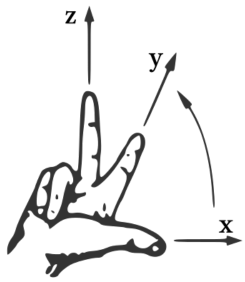
2D:



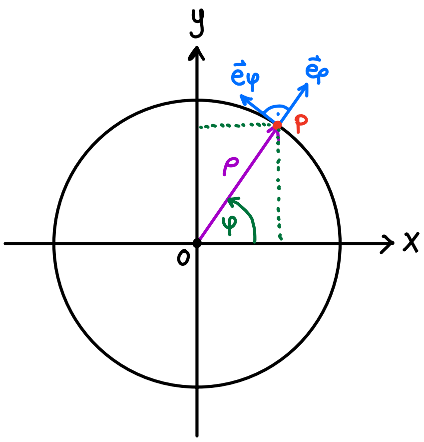
3D:



⚠ Bei 3D: Rechte-Hand-Regel beachten!



② Polarkoordinaten



Einheitsvektoren:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos(\varphi)\cdot e_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)e_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y\end{aligned}}$$

φ beschreibt den Winkel

ρ beschreibt den Radius

Umrechnung:

polar → kartesisch

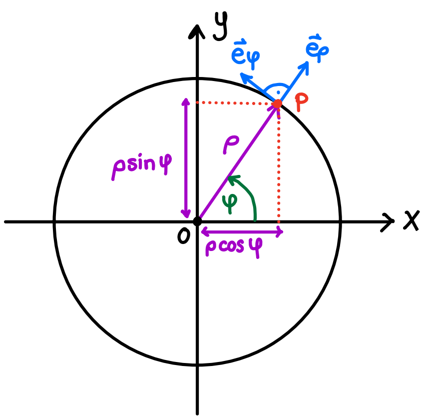
$x = \rho \cos(\varphi)$

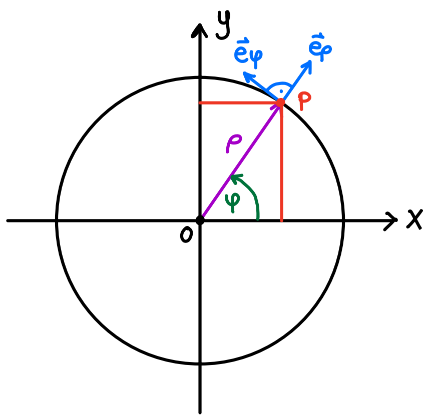
$y = \rho \sin(\varphi)$

kartesisch → polar

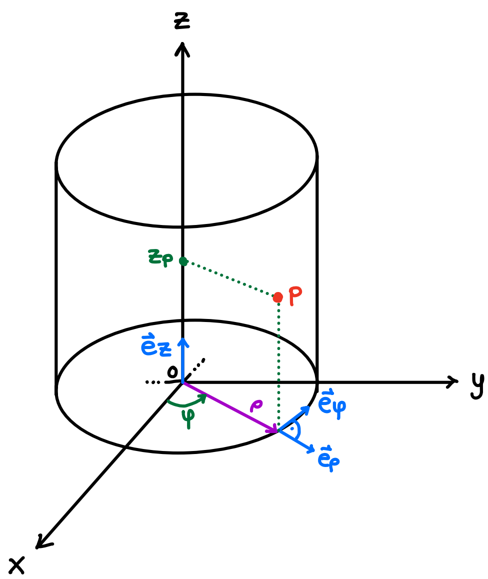
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$





③ Zylinderkoordinaten



Einheitsvektoren:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos(\varphi) \cdot e_x + \sin(\varphi)\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi) e_x + \cos(\varphi)\, \vec{e}_y \end{aligned}}$$

Umrechnung: **zylindrisch → kartesisch**

$x = \rho \cos(\varphi)$
$y = \rho \sin(\varphi)$
$z = z$

zylindrisch → kartesisch

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$

Schnelligkeit und Geschwindigkeit in Koordinatensystemen

- kartesische Koordinaten

Ortsvektor :

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

Geschwindigkeit :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}$$

Schnelligkeit :

$$\boxed{v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

- Polarkoordinaten ⚠ $\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\varphi(t))$

Ortsvektor :

$$\boxed{\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho}$$

Geschwindigkeit :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{e}_\rho) = \frac{d}{dt}(\rho\,\vec{e}_\rho(\varphi(t)))$$

$$= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \underline{\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

Schnelligkeit :

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2}}$$

- Zylinderkoordinaten ⚠ $\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\varphi(t))$

Ortsvektor :

$$\boxed{\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z}$$

Geschwindigkeit :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z}$$

Schnelligkeit :

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}}$$

Aufgabe:

Die Bewegungsgleichung eines materiellen Punktes ist in Zylinderkoordinaten ist gegeben als:

$$r(t) = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \\ sin(t) \end{pmatrix}$$

Was ist die Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten?

Was ist die Geschwindigkeit dieses materiellen Punktes?