ETH zürich

D MAVT

Xaver Huber

Technische Mechanik
151-0223-10

Kolloquium 01

Mathematische Grundlagen
Vektoralgebra & Trigonometrie

Herbstsemester 2025

16.09.2025

Kolloquium

- Dienstags, 12:15 - 13:00, ETF C 1 (1 Wochenstunde)
- Aufzeichnungen verfügbar auf https://video.ethz.ch/lectures.html
- Folien werden vor und nach Kolloquium auf Moodle geladen

- Wiederholung des Stoffes der Vorlesung
- Rechnen von Beispielaufgaben
- Clickerfragen zu Minimalbeispielen

- Übungssessions: Komplexere Aufgaben
- Übungen, Präsenzstunden, Fragenforum auf Moodle

LEGO Projekte

- https://innovedumprojekte.ethz.ch/4449/en
- 3 Projekte
- Freiwillig
- Notenbonus max. 0.25
- Gruppenwahl (3 Studierende) auf Moodle:
  - Deadline: **22.09.2025, 23:59**
  - Falls keine Gruppe gefunden: Gruppen 125 – 135
  - Bei Inaktivität eines Gruppenmitglieds oder falls nach Deadline keine Gruppe gefunden, kontaktieren Sie bitte Thomas Herzog (thherzog@student.ethz.ch)

Vektoren

Skalar

- ungerichtete Größe („kein Pfeil")
- Beispiele
  - Zeit t (s, min, h)
  - Temperatur T (K, °C, °F)
  - Masse m (kg, g, t)

Vektor

- gerichtete Größe („Pfeil")
- Beispiele
  - Geschwindigkeit $\vec{v}$ $\left(\frac{m}{s}, \frac{km}{h}\right)$
  - Kraft $\vec{F}$ (N)
  - Beschleunigung $\vec{a}$ $\left(\frac{m}{s^2}\right)$

Betrag

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

„Satz des Pythagoras"

Schreibweise

$$\vec{v} = \underline{v} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = (v_x, v_y, v_z)^T$$

$\vec{v}$

$\vec{OP}$

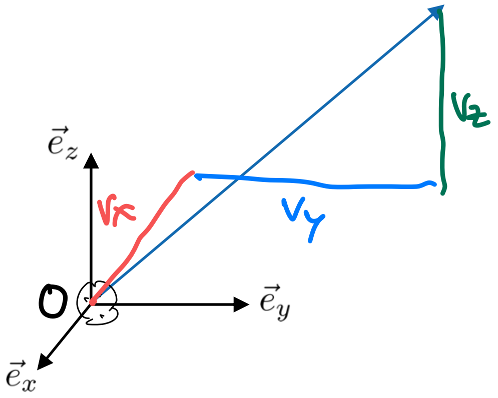
Vektor von O nach P : $\vec{OP}$

Bsp: $\vec{v}$ $\quad \|\vec{v}\| = v \quad$ $\vec{F}$ $\quad \|\vec{F}\| = F$

Pfeil ≠ Richt.

Basen von Vektoren

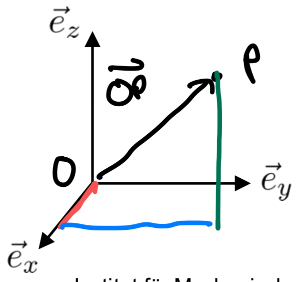
- Kartesische Basis
  - 3 orthonormale Basisvektoren $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
  - $\vec{e}_i$ → Einheitsvektor ($\|\vec{e}_i\| = 1$)
  - Rechtssystem → Rechte-Hand-Regel



$$\vec{v} = \underline{v_x} \cdot \vec{e}_x + \underline{v_y} \cdot \vec{e}_y + \underline{v_z} \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = (v_x, v_y, v_z)^\top$$

Koordinaten

Position eines Punktes in einem Koordinaten-System bezgl. dessen Ursprung



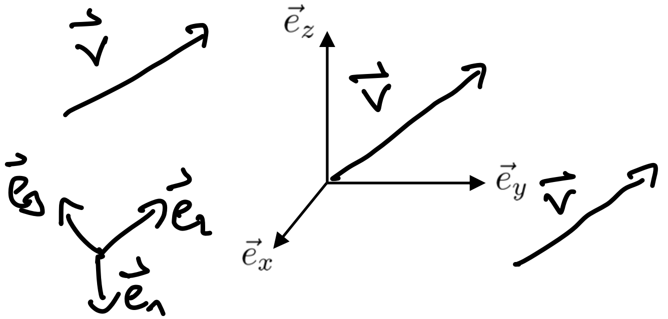
$\vec{v} = \vec{OP}$

Vektor

gerichtete Größe

↓ ↓

Richtung + Betrag



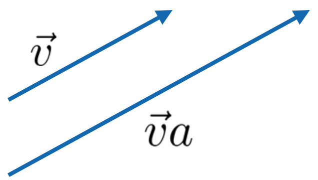
– beliebig verschiebbar im Raum

– unabh. vom Koord.-sys.

Vektor-Skalar Multiplikation

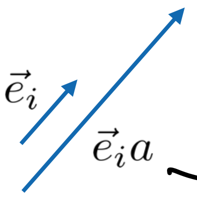
$\vec{v}a,\ a \in \mathbb{R}$

- $\underbrace{\text{Strecken}}_{a>1}/\underbrace{\text{Stauchen}}_{a<1}$ von Vektor



- Spezialfall: Einheitsvektor

$$\|\vec{e}_i\| = 1$$

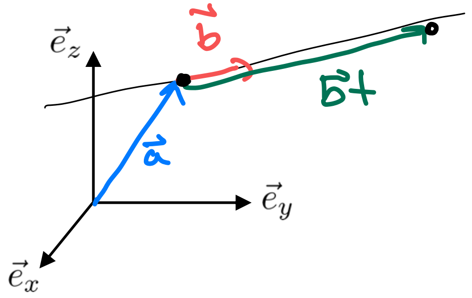


$\longrightarrow \|\vec{e}_i a\| = a$

not Betrag

- Anwendung: Parameterdarstellung von Geraden

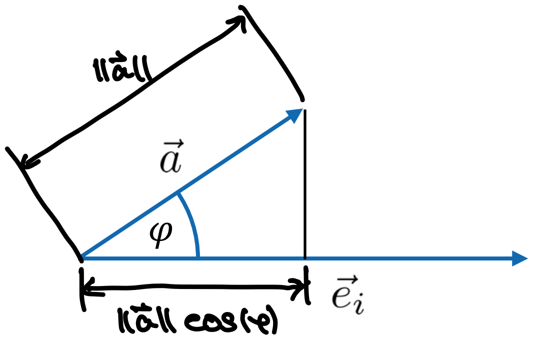
$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t \qquad t \in \mathbb{R}$$



Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

- Definition: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$



- Spezialfall: Einheitsvektor

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_i = \|\vec{a}\| \, \underbrace{\|\vec{e}_i\|}_{=1} \cos(\varphi) = \|a\| \cos(\varphi)$$

→ „Betrag von $\vec{a}$, der in $\vec{e}_i$-Richtung zeigt"

- Geometrische Interpretation: Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ et vice versa

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \vec{0}}$$

Einschub:

→ $\vec{a} \circ \vec{b} = \underbrace{\|\vec{a}\| \cos(\varphi)}_{\text{Betrag von } \vec{a} \text{ in } \vec{b}\text{-Richtung}} \cdot \underbrace{\|\vec{b}\|}_{\text{Betrag von } \vec{b}}$

→ Betrag von $\vec{a}$ in $\vec{b}$-Richtung $\vec{e}_b = \vec{b} \frac{1}{\|\vec{b}\|}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \frac{1}{\|\vec{b}\|} = \vec{a} \circ \vec{e}_b$

- Kartesisches Koordinatensystem

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (\vec{e}_x a_x + \vec{e}_y a_y + \vec{e}_z a_z) \circ (\vec{e}_x b_x + \vec{e}_y b_y + \vec{e}_z a_z)$$

Kart. Koord.

$$\vec{e}_i \circ \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 32$$

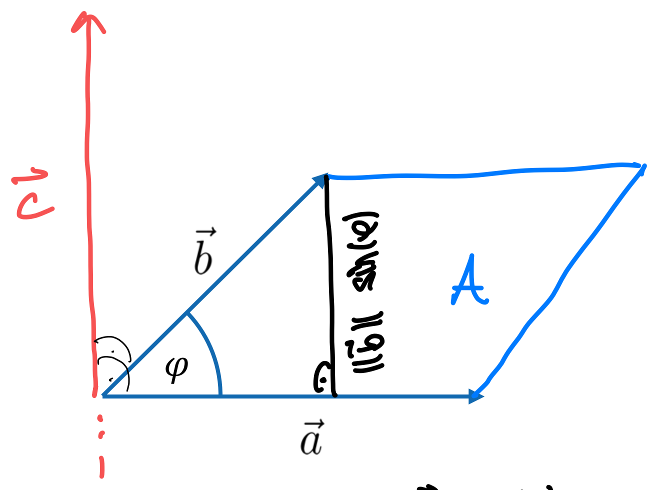
Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

- Definition: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$

→ Rechte-Hand-Regel

- Geometrische Interpretation:
  - Richtung: senkrecht zur Ebene aufgespannt von $\vec{a}, \vec{b}$
    → Rechte-Hand-Regel
  - Betrag: Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms



$A = \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \sin(\varphi)$

- Beispiele
  - Kartesische Basisvektoren: $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$
  - Numerisches Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$
  - Moment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
    "Hebelarm" × "Kraft"

- Eigenschaften:

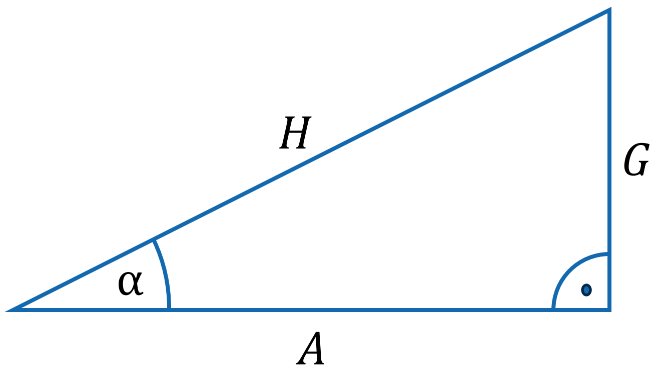
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b} \text{ oder } \vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

Trigonometrie

- Sinus, Cosinus & Tangens?

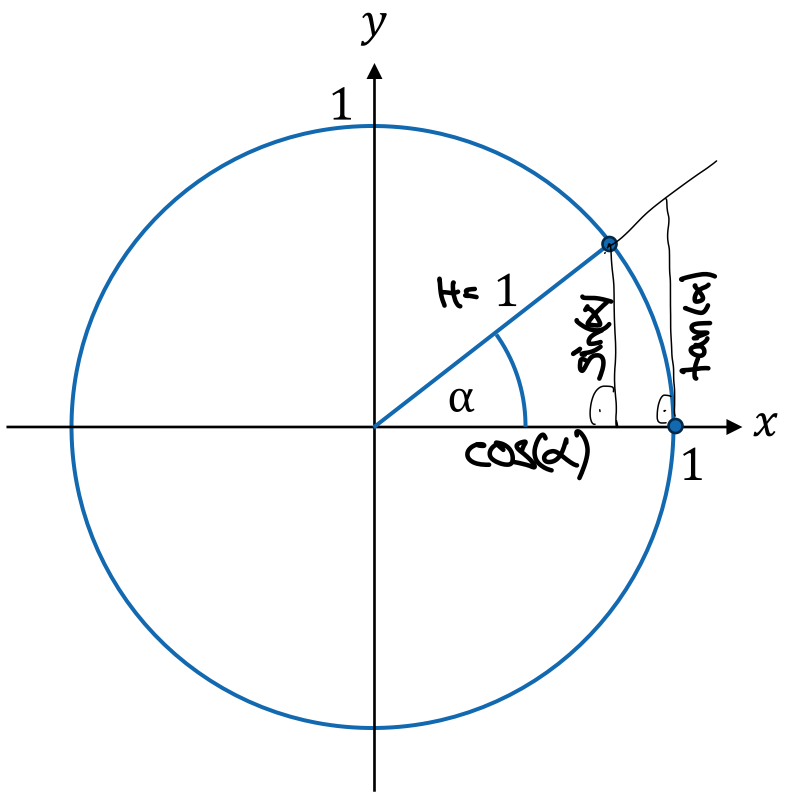


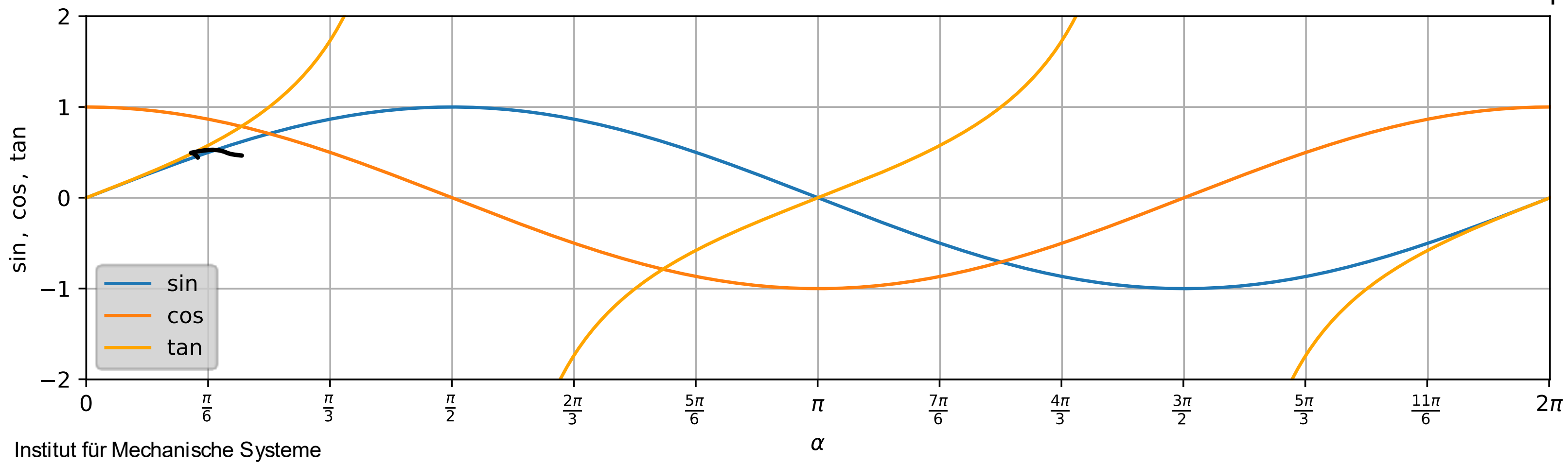
$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{G/H}{A/H} = \frac{G}{A}$$

Einheitskreis





Trigonometrie

- Sinus & Cosinus

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Formelsammlung

Zusammenfassung

- Additionstheoreme

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Analysis

- Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x))$$

$$f'(x) = \frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx} = u_v\, v'$$

äußere innere

Abl.

- Konvention:

$$y' = \text{Ableitung nach } x = \frac{dy}{dx}$$

$$\dot{y} = \text{Ableitung nach } t = \frac{dy}{dt}$$

$$y_{,w} = \text{Ableitung nach } w = \frac{dy}{dw}$$

- Beispiele:

$$y(t) = \sin(at) \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ const.}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\sin(at) = \cos(at)\, a$$

$$y(t) = \cos(\omega(t)) \text{ wobei } \omega(t) \text{ eine Funktion in } t \text{ ist}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\cos(\omega(t)) = \frac{d}{d\omega}\cos(\omega(t))\,\frac{d\omega}{dt} = -\sin(\omega(t))\,\dot{\omega}(t)$$