Potenzen und Wurzeln

[Grundlagen]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 https://pixabay.com/de/

2 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P._Oxy._I_29.jpg

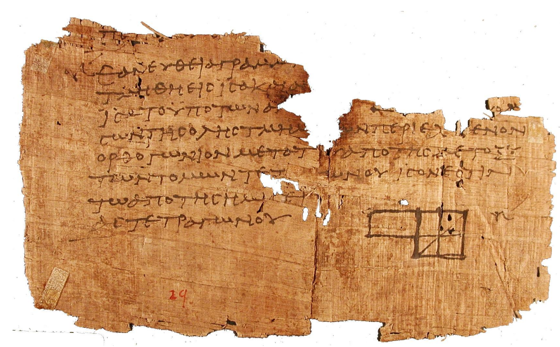
Ein Aspekt der Mathematik (unter vielen) ist der formale Umgang mit Termen und Formeln. Dieser Aspekt spielt immer wieder eine Rolle, weil ja Mathematik sehr oft dazu da ist, Resultate für ganz praktische Aufgaben zu liefern. Es versteht sich daher von selbst, dass alle Anstrengungen unternommen werden müssen, damit dieser formale Umgang *korrekt* passiert, weil sonst falsche Resultate geliefert werden.

In diesem Skript wird der formale Umgang mit ganz bestimmten (aber sehr häufigen) Termen im Zentrum stehen, und die Hauptschwierigkeit wird darin bestehen, dass alle Schritte korrekt sind. Ein Vergleich mit dem Schachspiel ist dabei recht nahe liegend: Beim Schach ist durch ein Regelwerk genau festgelegt, welches erlaubte Züge sind und welches nicht, und wer sich nicht daran hält, wird disqualifiziert. Sehr ähnlich wird es sich auch mit den hier besprochenen Termen verhalten. Es wird durch ein Regelwerk genau festgelegt, welche Umformschritte korrekt, erlaubt, zulässig sind. Und wir müssen uns tunlichst daran halten, nichts Falsches zu tun, da sonst unmögliche „Spielsituationen“ entstehen, die zu falschen Ergebnissen führen.

Kurz: Es geht um den korrekten Umgang mit Termen, welche Potenzen und Wurzeln enthalten.

Beispiele von Potenzen

Zuerst ein paar Beispiele zu Potenzen, die Ihnen vielleicht schon vertraut sind:

> Samuel Hahnemann (1755 – 1843) gilt als Erfinder der Homöopathie. Diese Methode arbeitet mit stark verdünnten Wirksubstanzen. Eine Ursubstanz wird zum Beispiel 10-fach mit Wasser und Alkohol verdünnt und geschüttelt, diese Verdünnung wird erneut 10-fach verdünnt, usw. Die Bezeichnung „D30“ bedeutet dann etwa, dass dieser Verdünnungsprozess 30mal stattgefunden hat, dass also eine 10^{30}-fache Verdünnung erreicht ist. (Die Bezeichnung „D“ stammt von lateinisch *decimum = Zehnfaches.*) Das entspricht etwa der Auflösung eines Würfelzuckers in einer Wassermenge, die in tausend Erdkugeln Platz hat, so dass mit grosser Sicherheit in einem Fläschchen kein einziges Molekül der Wirksubstanz mehr vorhanden ist.
>
> 
>
> Abbildung 1: Homöopathische Globuli
>
> Aus dem Rechenbuch des Ahmes, Ägypten, um 1700 v.Chr.
>
> 
>
> Abbildung 2: Ausschnitt aus dem Rechenbuch des Ahmes

7 Personen besitzen (je) 7 Katzen, jede Katze frisst 7 Mäuse, jede Maus frisst 7 Ähren Gerste, aus jeder Ähre Gerste können 7 Mass Getreide entstehen. Wie viel Mass sind das? Hier entsteht wiederum eine simple Potenz mit einem natürlichen Exponenten, diesmal zur Basis 7.

Potenzen haben den Vorteil, dass damit zum Beispiel riesige Zahlen kurz und kompakt dargestellt werden können, wie etwa:

10^{11} ist die ungefähre Anzahl der Galaxien im Universum.

10^{21} ist die ungefähre Anzahl Sterne im Universum.

10^{28} ist der ungefähre Durchmesser des Universums in Zentimetern.

10^{78} ist die ungefähre Anzahl Atome im Universum.

Erste Definitionen

Wiederholen wir zunächst zwei längst bekannte Definitionen; legen Sie aber trotz der Wiederholung viel Wert auf die Details:

Definition: (1)
*Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ mit n Faktoren. Lies „a hoch n“ oder „n-te Potenz von a“. a heisst **Basis**, n heisst **Exponent** (lat.: der Heraufgesetzte).*

Definition: (2)
*Sei $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Diejenige nicht-negative reelle Zahl x mit der Eigenschaft $x^n = a$ heisst **n-te Wurzel** von a. Schreibweise: $x = \sqrt[n]{a}$.*

Das Berechnen einer Wurzel nennt man „Wurzelziehen“ oder „Radizieren“ (lat.: radix = Wurzel).

Für den Umgang mit Potenzen und Wurzeln gibt es Gesetze (die erlaubten Züge), die wir im Folgenden herleiten. Zuvor sollten Sie sich allerdings an einige Axiome der Algebra erinnern. Wir werden in den Beweisen der Potenz- und Wurzelgesetze immer wieder auf sie Bezug nehmen, so dass es sehr unklug wäre, sie nicht zu kennen:

Axiome aus der Algebra

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ wird die Gültigkeit der folgenden Gesetze axiomatisch gefordert:

Kommutativität der Addition und der Multiplikation:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativität der Addition und der Multiplikation:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Die folgende Übersicht zeigt Ihnen nun die klassischen beweisbaren Gesetze, die den Umgang mit Potenzen mit natürlichen Exponenten sowie n-ten Wurzeln regeln:

Potenzgesetze für natürliche Exponenten

Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

(P1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(P2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(P3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

(P4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(P5) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, mit $n > m$

Wurzelgesetze für n-te Wurzeln

Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

(W1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

(W2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(W3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Diese Gesetze werden hier nur für $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ behauptet. Sie gelten zwar auch für andere (nicht-natürliche) Exponenten und Wurzeln, aber das ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar; und es ist deswegen nicht klar, weil andere Potenzen und Wurzeln (zum Beispiel 2^{-3}, $7^{0.25}$, 6^{π}, $\sqrt[0.2]{3}$ usw.) bisher noch gar nicht definiert sind. Im weiteren Verlauf dieses Textes werden wir auch solche Potenzen und Wurzeln einführen, und dann wird sich die Frage stellen, ob die obigen Gesetze auch mit solchen Exponenten Gültigkeit besitzen. Eventuell könnte es Ihnen ein Trost sein zu wissen, dass Sie im ganzen restlichen Text keine wirklich neuen Gesetze werden lernen müssen.

Nun gehört es sich, behauptete mathematische Gesetze auch zu beweisen. Dadurch können sie wirklich tief verstanden werden und es wird auch leichter, sie sich einzuprägen, was natürlich unumgänglich ist.

Beweis (P1). Für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}, a \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^n \cdot a^m = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}\right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}}\right),$$

nach Definition (1). Dann

$$\left(\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}\right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}}\right) = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ Faktoren}}$$

nach dem Assoziativgesetz und schliesslich

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ Faktoren}} = a^{n+m}$$

wieder nach Definition (1) oben. □

So wenig ist also nötig, um den erforderlichen Beweis zu erbringen: Sie sehen, dass (P1) unmittelbar aus der Definition der n-ten Potenz sowie dem Assoziativgesetz folgt.

Beweis (P2). Für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}, a \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^n \cdot b^n = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}\right) \cdot \left(\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}\right),$$

nach Definition (1) oben. Dann

$$\left(\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ Faktoren}}\right)\cdot\left(\underbrace{b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ Faktoren}}\right)=\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ Faktoren}}\cdot\underbrace{b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ Faktoren}}$$

nach dem Assoziativgesetz und schliesslich

$$\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ Faktoren}}\cdot\underbrace{b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ Faktoren}}=(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)$$

nach Kommutativ- und Assoziativgesetz und dann noch

$$(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)=(a\cdot b)^n$$

wieder nach Definition (1). □

Wir überlassen Ihnen die einfachen Beweise von (P3) – (P5) zur Übung. Beachten Sie unbedingt, dass in diesen Beweisen ständig Gebrauch davon gemacht wird, dass $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Es wäre also völlig unsinnig, allein auf Grund obiger Beweise die Gültigkeit der Potenzgesetze für irgendwelche anderen Typen von Exponenten zu behaupten.

Nun widmen wir uns den Beweisen der oben behaupteten Wurzelgesetze.

Beweis (W1). Es wird behauptet, dass der linke Term die n-te Wurzel von $a \cdot b$ ist. Wie kann das bewiesen werden? Nun, offenbar dadurch, dass man überprüft, ob in der Tat die n-te Potenz des linken Terms gleich $a \cdot b$ ist. (Dann ist ja nach der zweiten Definition oben der linke Term die n-te Wurzel von $a \cdot b$.) Berechnen wir also die n-te Potenz des linken Terms:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=a\cdot b.$$

Die erste Gleichheit folgt sofort mit (P2) während das zweite Gleichheitszeichen wegen Definition (2) oben gilt. Somit ist der linke Term in (W1) die n-te Wurzel von $a \cdot b$, was ja zu beweisen war. □

Beachten Sie, dass wir hier bereits eines der noch „ofenwarmen“ (da eben erst bewiesenen) Potenzgesetze verwendet haben. Auch hier überlassen wir Ihnen die restlichen Beweise zur Übung.

Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Bisher haben wir uns nur mit natürlichen Exponenten auseinandergesetzt. Zudem weist (P5) die etwas künstlich anmutende Beschränkung „$n > m$“ auf, weil sonst ein negativer Exponent entstünde. Ist es möglich, auch nicht-natürliche Exponenten zuzulassen? Und ist es möglich, die künstliche Beschränkung bei (P5) fallenzulassen? Denken wir einen Moment darüber nach, was es bedeuten würde, wenn (P5) nicht den Nachsatz „$n > m$“ aufwiese: Dann müsste (P5) offenbar für *alle* möglichen natürlichen Zahlen n, m gelten, z.B. auch für $n = 3$ und $m = 7$. Dann wäre aber

$$\frac{a^3}{a^7}=a^{3-7}=a^{-4}.$$

Wie Sie sehen, kommen auf ganz natürliche Weise negative ganzzahlige Exponenten ins Spiel, sobald man nur bestrebt ist, die etwas unbefriedigend wirkende Beschränkung in (P5) fallen zu lassen. Man könnte nun entweder die Beschränkung akzeptieren (und negative Exponenten verbieten) oder sich überlegen, ob negative Exponenten nicht vielleicht sogar sinnvoll und praktisch sein könnten. Die Mathematiker des 17. Jahrhunderts wählten den zweiten Weg. In den folgenden Abschnitten werden wir uns mit dem Exponenten 0 und negativen ganzzahligen Exponenten auseinandersetzen, dann sogar mit rationalen und reellen Exponenten.

Geschichte

Die Griechen hatten besondere Namen für einzelne Potenzen. Ihre Bezeichnung „dynamis“ für x^2 wurde lateinisch mit „potentia“ übersetzt und gab allen Potenzen den heutigen Namen. Der Inder Brahmagupta (um 600 n.Chr.) schrieb „va“ für x^2 und „gha“ für x^3 (varga = Quadrat,ghana = Körper) und bildete daraus

$$\begin{aligned}(\text{va})(\text{va}) &= x^4,\\ (\text{gha})(\text{gha})(\text{gha}) &= x^9\end{aligned}$$

usw. Die heutige Schreibweise kam erst im 17. Jahrhundert auf und geht im Wesentlichen auf R. Descartes zurück. Der Name „Exponent“ geht auf Michael Stifel zurück. Der Exponent 0 sowie negative Exponenten wurden zuerst von dem französischen Mathematiker Chuquet 1484 verwendet. Gebrochene Exponenten traten vom 14. Jahrhundert an gelegentlich auf, wurden aber erst von Newton (1687) systematisch eingeführt. Auf höhere Wurzeln stiessen die Griechen u.a. beim Problem der Würfelverdoppelung. Die Rechenregeln für höhere Wurzeln wurden von den Arabern (ca. 800–1100) entwickelt.

Definition: (3)
Für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ gilt $a^0 := 1$.

Das muss erklärt werden. Diese Definition mutet vielleicht sehr willkürlich an, aber bei genauerem Hinsehen wird klar, dass wir keine andere vernünftige Alternative haben: Wir fragen uns nämlich, was (P5) für den Fall $n = m$ liefern würde. *Würde*. Der Konjunktiv ist hier zentral. Das Gesetz ist für diesen Fall nicht bewiesen worden, aber natürlich wünschen wir uns, dass das Gesetz auch für diesen Fall gelten möge. *Würde* es aber für diesen Fall gelten, so müsste es Folgendes liefern:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0.$$

Sie sehen, dass wir gar keine andere Wahl haben, als $a^0 := 1$ zu definieren, da sonst Gesetz (P5) eine merkwürdige Ausnahme erzeugen würde. Es ist aber wichtig zu betonen, dass $a^0 = 1$ *nicht* aus (P5) folgt!

Nun, da klar ist, was man unter einer 0-ten Potenz versteht, fragen wir uns, wie wir Potenzen mit *negativen ganzzahligen* Exponenten definieren sollen:

Definition: (4)
Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $a \neq 0$ gilt

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Auch dies muss erklärt werden. Erneut könnte die Definition willkürlich wirken, doch erneut zeigt eine genauere Analyse, dass wir keine echte Wahl haben: (P5) *würde* (!) für das Beispiel $n = 3$ und $m = 7$ folgende Umformung erlauben:

$$a^{-4} = a^{3-7} = \frac{a^3}{a^7} = \frac{aaa}{aaaaaaa} = \frac{1}{a^4}.$$

Würde (P5) also für diesen Fall gelten - was es nicht tut, wir uns aber wünschen - so haben wir keine andere Wahl, als die Definition so zu gestalten, dass a^{-4} und $1/a^4$ übereinstimmen.

Merke:

Jetzt, da wir Potenzen mit negativen Exponenten eingeführt haben, aber erst jetzt, kann man sinnvollerweise die Frage stellen, ob unsere Potenzgesetze auch gültig bleiben, wenn man negative Exponenten zulässt. Und die Antwort lautet erfreulicherweise „Ja“! Aber natürlich ist das nicht klar, sondern es muss bewiesen werden. Und genau das tun wir jetzt.

Im Folgenden seien immer $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

Beweis (P1)'. Zu zeigen ist

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = a^{(-n)+(-m)}.$$

Also finden wir mit Definition (4) (erste und zweit-letzte Gleichheit):

$$\begin{aligned} a^{-n} \cdot a^{-m} &= \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} \\ &= \frac{1}{a^n \cdot a^m} \\ &= \frac{1}{a^{n+m}} \\ &= a^{-(n+m)} \\ &= a^{(-n)+(-m)}. \end{aligned}$$

□

Beweis (P2)'. Zu zeigen ist

$$a^{-n} \cdot b^{-n} = (a \cdot b)^{-n}.$$

Also finden wir mit Definition (4) (erste und letzte Gleichheit) sowie Definition (2) (zweit-letzte Gleichheit):

$$\begin{aligned} a^{-n} \cdot b^{-n} &= \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} \\ &= \frac{1}{(a \cdot b)^n} = (a \cdot b)^{-n}. \end{aligned}$$

□

Die restlichen Gesetze überlassen wir Ihnen zur Übung:

(P3)' $(a^{-n})^{-m} = a^{(-n)\cdot(-m)}$,

(P4)' $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$,

(P5)' $\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = a^{(-n)-(-m)}$.

Man kann sich auch leicht überlegen, dass diese fünf Gesetze gültig bleiben, wenn mindestens ein Exponent 0 ist.

Damit haben wir die Gültigkeit der Potenzgesetze auf $\mathbb{Z}$ ausgedehnt haben. Benutzt haben wir für die Beweise die Aussagenmenge $\{(P1), (P2), (P3), (P4), (P5)\} \cup \{\textit{Axiome der Algebra}\}$ sowie die Definitionen.

Beweisen Sie ferner:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

Das ist ein praktisches Gesetz. Wenn immer Ihnen ein negativer Exponent auf einem Bruch nicht gefällt, dürfen Sie getrost den Kehrbruch nehmen und ihn mit dem entsprechend positiven Exponenten versehen.

Negative ganzzahlige Exponenten haben den grossen Vorteil, dass mit ihnen Grössen im mikroskopischen Bereich dargestellt werden können; darum sind sie auch aus den modernen Wissenschaften nicht mehr wegzudenken.

In diesem Zusammenhang sollten Sie sich die folgenden Sprechweisen einprägen:

$10^{-1} = 0.1$, „ein Zehntel oder 1 Dezi-. . . “

$10^{-2} = 0.01$, „ein Hundertstel oder 1 Zenti-. . . “

$10^{-3} = 0.001$, „ein Tausendstel oder 1 Mili-. . . “

$10^{-6} = 0.000001$, „ein Millionstel oder 1 Mikro-…"

$10^{-9} = 0.000000001$, „ein Milliardstel oder 1 Nano-…"

$10^{-12} = 0.000000000001$, „ein Billionstel oder 1 Piko-…"

$10^{-15} = 0.000000000000001$, „ein Billiardstel oder 1 Femto-…"

$10^{-15} = 0.000000000000000001$, „ein Trillionstel oder 1 Atto-…"

Beispiele aus den Naturwissenschaften:

Die Ladung eines Elektrons beträgt $-1.602\ldots \cdot 10^{-19}$ C.

Die Masse eines Elektrons beträgt $9.109\ldots \cdot 10^{-31}$ kg.

Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir gehen nun einen grossen Schritt weiter. Nachdem es uns gelungen ist, die Exponenten auf die negativen ganzen Zahlen auszudehnen und - mehr noch - die Potenzgesetze auch für solche Exponenten zu beweisen, liegt die Frage nahe, ob man auch gebrochene Exponenten sinnvoll einführen kann und ob die Potenzgesetze auch für solche Exponenten gelten. Wir führen uns hier ziemlich unersättlich auf, aber es ist nun mal eine Eigenart des Mathematikers/der Mathematikerin, nicht eher zu ruhen, bis alles, wirklich alles über einen Begriff (hier: Potenz) in Erfahrung gebracht worden ist.

Wie - wenn überhaupt - sollen wir $a^{1/n}$ (für eine natürliche Zahl n) definieren? Dieser Term ist zum jetzigen Zeitpunkt *undefiniert*. Immerhin können wir aber so tun, als wäre er schon sinnvoll, um mit ihm zu „spielen", das heisst um zu sehen, wie die Gesetze auf ihn wirken *würden* (wenn es ihn denn gäbe).

Wenn der Term $a^{1/n}$ also schon definiert wäre und *wenn* die Gesetze auch für Potenzen dieser Art gelten würden - bedenken Sie aber, dass dies alles noch nicht der Fall ist - dann würde zum Beispiel (P3) Folgendes bewirken:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a.$$

Offenbar wäre dann die n-te Potenz von $a^{1/n}$ gleich a. Nanu? Das kennen wir doch! Eine Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist, nennen wir per Definition *n-te Wurzel* der Zahl a. Daraus wird klar, wie wir den Term a definieren müssen (wenn wir es denn wollen), nämlich so:

Definition:
Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a \geqslant 0$ gilt

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

MERKE:

Jede andere Definition hätte zur Folge, dass die bisherigen Gesetze **nicht** für diesen neuen Typ von Potenz gelten würden. Wäre das nicht schade? Sie müssten dann zwei Sorten Gesetze lernen, je nachdem, welcher Typ von Potenz gerade verwendet wird.

Nun haben wir erst erklärt, wie $a^{1/n}$ zu definieren ist. Was aber ist mit anderen rationalen Exponenten? Was soll unter dem Term $a^{m/n}$ verstanden werden? Geben Sie nun selber eine Motivation für die folgende Definition:

Definition:
Für alle $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (also $m/n \in \mathbb{Q}$) und $a \geqslant 0$ gilt

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Nun müsste es mit dem Teufel zugehen, wenn unsere Potenzgesetze nicht auch noch für solche Exponenten gelten würden. Bedenken Sie aber, dass dies nicht klar ist. Wir haben die Definitionen (5) und (6) zwar in gewissem Sinne aus den Potenzgesetzen gewonnen, aber noch nicht verifiziert, dass alle Potenzgesetze nun weiterhin Gültigkeit haben. Im Folgenden wird es also darum gehen, die Potenzgesetze für *beliebige rationale Exponenten* zu beweisen. Ein allerletzter Schritt müsste dann noch darin bestehen, *beliebige reelle Exponenten* zuzulassen.

Im Folgenden seien $p/q, r/s \in \mathbb{Q}$ beliebig.

Beweis (P1)". Zu zeigen ist

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

Dies gelingt mit Definition (6) in der zweiten und dritt-letzten Gleichheit, sowie (W1) in der dritten und (P1) in der vierten Gleichheit:

$$\begin{aligned}
a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &= a^{\frac{p\cdot s}{q\cdot s}} \cdot a^{\frac{r\cdot q}{s\cdot q}} \\
&= \sqrt[q\cdot s]{a^{p\cdot s}} \cdot \sqrt[q\cdot s]{a^{q\cdot r}} \\
&= \sqrt[q\cdot s]{a^{p\cdot s} \cdot a^{q\cdot r}} \\
&= \sqrt[q\cdot s]{a^{p\cdot s+q\cdot r}} \\
&= a^{\frac{p\cdot s+q\cdot r}{q\cdot s}} \\
&= a^{\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{q\cdot r}{q\cdot s}} \\
&= a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.
\end{aligned}$$

□

Die restlichen Beweise überlassen wir Ihnen gerne zur Übung, da sie alle ähnlich einfach verlaufen:

(P2)" $a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}$,

(P3)" $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$,

(P4)" $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$,

(P5)" $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$.

Benutzen Sie für die Beweise $\{(P1), \ldots, (P5)\} \cup \{(P1)', \ldots, (P5)'\} \cup \{\textit{Axiome der Algebra}\}$ sowie die Definitionen. Damit werden Sie die Gültigkeit der Potenzgesetze auf $\mathbb{Q}$ ausgedehnt haben.

Damit haben wir schon sehr viel erreicht: Wir haben gezeigt, dass die eingangs erwähnten Potenzgesetze für Potenzen mit *beliebigen rationalen Potenzen* gelten; und natürlich haben wir einige wichtige Definitionen kennen gelernt, die die Bedeutung solcher Potenzen überhaupt erst festlegen.

Zusammenfassung

Die Potenzgesetze

(PG1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(PG2) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

(PG3) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$

(PG4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

(PG5) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

gelten für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

Beachten Sie aber, dass zum Teil $a \geqslant 0$ und/oder $b \geqslant 0$ gelten muss.

Potenzen mit irrationalen Exponenten

Was ist zum Beispiel 2^π? Nach den bisherigen Definitionen hat der Term 2^π (noch) keine wohldefinierte Bedeutung. Hingegen ist klar, dass

$$2^3 < 2^\pi < 2^4$$

was eine erst sehr grobe Näherung angibt. Verbessern wir die Näherung schrittweise:

$$2^{3.1} < 2^\pi < 2^{3.2}$$

wobei die flankierenden Terme wohldefiniert sind:

$$2^{3.1} = 2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}}$$

und

$$2^{3.2} = 2^{\frac{32}{10}} = \sqrt[10]{2^{32}}.$$

Nächster Schritt:

$$2^{3.14} < 2^\pi < 2^{3.15},$$

wobei

$$2^{3.14} = 2^{\frac{314}{100}} = \sqrt[100]{2^{314}} \approx 8.815$$

und

$$2^{3.15} = 2^{\frac{315}{100}} = \sqrt[100]{2^{315}} \approx 8.876.$$

Es scheint klar, dass durch Einbezug immer weiterer Stellen 2^π in einem immer kleineren Intervall „gefangen“ wird. Auf diese Weise lassen sich *beliebig viele* Stellen von 2^π berechnen. (Alle natürlich nicht, genauso wenig, wie man *alle* Stellen von π oder irgendeiner anderen irrationalen Zahl berechnen kann.)

Wir können uns also eine Potenz mit irrationalem Exponenten immer so vorstellen, dass man den Exponenten rational approximiert und so einen wohl definierten Term erhält, der „beliebig genau an die intendierte Zahl herankommt“. Das alles mag etwas vage klingen, es soll für unsere Zwecke aber genügen. Tatsache ist, dass man das in der höheren Mathematik alles ganz präzise definieren kann; und dass man auch zeigen kann, dass unsere Potenzgesetze in der Tat für beliebige reelle Exponenten gelten.