Quadratische Funktionen

[Grundlagen]

Armin P. Barth

Kickt Ronaldinho in einem bekannten Werbefilm den Ball in einem langen Bogen an die Torlatte, so beschreibt die Flugbahn des Balls in guter Näherung den Graphen einer quadratischen Funktion. Spritzt man Wasser aus einem Gartenschlauch in die Luft, so beschreibt der Strahl in guter Näherung den Graphen einer quadratischen Funktion. Wirft man einen Gegenstand senkrecht nach oben, so ist seine erreichte Höhe in guter Näherung eine quadratische Funktion der Zeit. Bewegt sich eine Masse, so ist ihre kinetische Energie (und auch ihr Luftwiderstand) eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit.

Stützbögen von Brücken werden oft so konstruiert, dass sie in guter Näherung dem Graphen einer quadratischen Funktion folgen. Die Kreisfläche ist eine quadratische Funktion des Radius. Fragt man sich, wie viele Diagonalen ein n-Eck hat, so findet man eine quadratische Funktion. Dasselbe geschieht, wenn man sich fragt, wie die Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu berechnen ist. Das Funktionieren von Parabolantennen, Solarkochern, Lautsprechern und Scheinwerfern gründet oft auf einer charakteristischen Eigenschaft der quadratischen Funktion.

Als Galileo Galilei im Jahr 1609 kleine Kugeln über eine Rampe hinabrollen liess, um nach ihrem freien Fall die horizontale Entfernung zur Rampe zu messen, in der sie auf dem Boden aufschlugen, untersuchte er eigentlich quadratische Funktionen. Und es gelang ihm nachzuweisen, dass die Bewegung eine Zusammensetzung zweier unabhängiger Bewegungen ist: einer horizontaler mit konstanter Geschwindigkeit und einer vertikalen beschleunigten.

Es gibt viele gute Gründe, sich mit der quadratischen Funktion eingehend zu befassen; darum widmen wir ihr hier nun einige Seiten. Dabei werden wir allen oben aufgeführten Beispielen und weiteren erneut und ausführlicher begegnen. Wichtig ist aber, einmal mehr festzuhalten, dass es eine Wesensart der Mathematik ist, nicht im Exemplarischen zu verbleiben, sondern die *allgemeinen Gesetzmässigkeiten* des Konzeptes herauszuarbeiten, das all den Beispielen zugrunde liegt. Indem wir im Folgenden also die *allgemeine quadratische Funktion* untersuchen und ihre Eigenschaften zu verstehen lernen, wappnen wir uns insbesondere für alle Instanzen, in denen diese so wichtige Funktion künftig in Erscheinung treten mag.

Definition

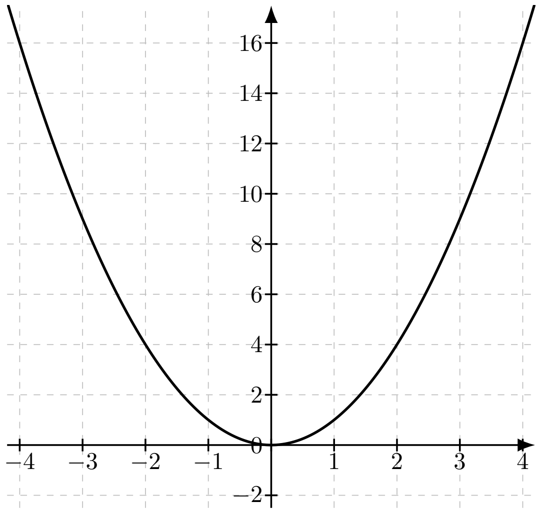
Prägen wir uns zu Beginn die Definition einer quadratischen Funktion ein:

Definition:
Eine Funktion der Art

$$f : x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

mit reellen Koeffizienten $a, b, c, (a \neq 0)$*, heisst* ***quadratische Funktion****. Würden wir* $a = 0$ *zulassen, so wäre die Funktion offenbar nicht mehr quadratisch, sondern höchstens linear. Der Graph einer solchen Funktion heisst* ***Parabel****.*

Sind speziell $a = 1$ und $b = c = 0$ und damit also $f(x) = x^2$), so spricht man von der **Normalparabel**.



Wir lassen nun also zusätzlich zu dem linearen Term $b \cdot x + c$ noch einen quadratischen Term $a \cdot x^2$ zu. Das wird bei den Graphen natürlich zu einem ganz typischen Verhalten führen, das wir bald entdecken werden. Freilich können Graphen solcher Funktionen sicher nicht mehr linear sein; der quadratische Term sorgt ja dafür, dass bei immer gleichen Erhöhungen des Inputs durchaus nicht immer gleiche Veränderungen beim Output erfolgen. Dass der Graph also gekrümmt ist, wird uns nicht überraschen.

Die Normalparabel zeigt das noch deutlicher: Der Graph ist nicht nur einfach „irgendwie gekrümmt“, die Funktion ist sogar *gerade*, weil einer Zahl x und der Zahl $-x$ stets derselbe Output zugeordnet wird: $f(-x) = f(x)$. Der Graph ist also gekrümmt, hat den Ursprung als tiefsten Punkt und wird dank des quadratischen Terms mit wachsendem $|x|$ immer steiler.

Die Polynomfunktion

Wie die an anderem Ort behandelte lineare Funktion ist auch die quadratische Funktion ein Beispiel einer *Polynomfunktion*. Darum ist es sinnvoll, dass wir hier das Ergründen der quadratischen Funktion ganz kurz unterbrechen, um diesen allgemeineren Funktionstypus kennenzulernen. Eine lineare Funktion könnte so aussehen:

$$y = -2.4x + 6.$$

Eine quadratische Funktion könnte so aussehen:

$$y = 0.5x^2 - 4x + 11.$$

Über jeden dieser Funktionsterme kann man sagen, dass er eine Summe darstellt von Vielfachen von Potenzen der Unbekannten. Eine Differenz kann ja immer auch als Summe geschrieben werden, und die additiven Konstanten könnte man sich mit x^0 multipliziert denken. Terme, die die Eigenschaft haben, Summen von Vielfachen von natürlichen Potenzen der Unbekannten zu sein, führen auf sogenannte Polynomfunktionen. Genauer:

Definition:
Eine Funktion der Art

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

*mit reellen **Koeffizienten** $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$ heisst **Polynomfunktion**. Unter dem **Grad** einer Polynomfunktion versteht man den höchsten vorkommenden Exponenten der Unbekannten, hier also n.*

Da man jede lineare Funktion in der Form

$$y = a_1 \cdot x^1 + a_0$$

darstellen kann, kann man eine lineare Funktion also auch als *Polynomfunktion 1. Grades* bezeichnen. Da man jede quadratische Funktion in der Form

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

darstellen kann, kann man eine quadratische Funktion auch als *Polynomfunktion 2. Grades* bezeichnen.

Und natürlich entstehen viele spannende Probleme, indem man sich fragt, was man Allgemeines über Polynomfunktionen aussagen kann, und wie sich die Eigenschaften ändern, wenn man den Grad erhöht. Aber solche Fragen können hier leider nicht Gegenstand unserer Bemühungen sein. Konzentrieren wir uns nun also wieder auf die quadratische Funktion beziehungsweise die Polynomfunktion 2. Grades.

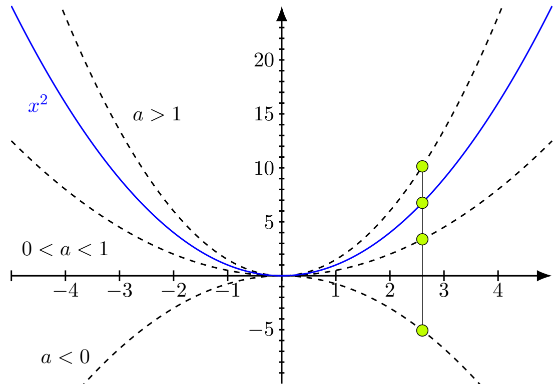
Wie sieht der Graph einer quadratischen Funktion aus?

Wir haben bereits die Normalparabel kennengelernt; was aber kann man über den Graphen irgendeiner Polynomfunktion 2. Grades aussagen?

Was haben wir bisher verstanden? Dass die Normalparabel eine nach oben offene, gekrümmte und bezüglich der y-Achse symmetrische Kurve mit dem Ursprung als tiefstem Punkt sein muss, ist leicht nachvollziehbar.

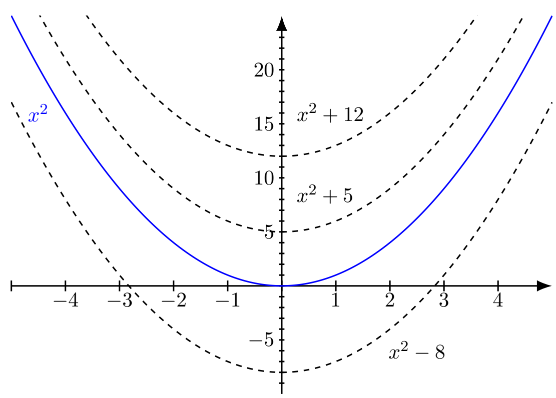
Schauen wir zuerst, wie sich (verglichen mit der Normalparabel) der Graph verändert, wenn wir statt $a = 1$ einen anderen Koeffizienten a wählen und/oder wenn wir statt $c = 0$ eine andere additive Konstante c wählen.

Wählt man statt $f : y = x^2$ die Funktion $y = a \cdot x^2$, so wird jeder einzelne Funktionswert von f mit derselben Konstanten a multipliziert. Ist $a > 1$, so wird also jeder einzelne Funktionswert um diesen Faktor vergrössert; ist aber $0 < a < 1$, so wird jeder einzelne Funktionswert um diesen Faktor verkleinert. Negative a-Werte schliesslich „klappen“ die Parabel nach unten.



Man kann auch sagen: Der Koeffizient a beeinflusst die „Öffnungsweite“ der Parabel und bestimmt zudem, ob diese nach oben oder nach unten geöffnet ist.

Ebenso klar ist, welchen graphischen Effekt das Addieren einer Konstanten c zu x^2 bewirkt. Wie von einer unsichtbaren Liftkabine bewegt, wird die Normalparabel einfach um die entsprechende Zahl in y-Richtung verschoben, weil jeder einzelne Funktionswert der Funktion $y = x^2$ nun um den Wert c vergrössert (bzw. verkleinert) wird.



Bezüglich des Einflusses des Koeffizienten b herrscht jetzt noch Unklarheit. Die vielleicht naheliegende Vermutung, dass b einfach nur eine horizontale Verschiebung verursacht, wird sich als falsch erwiesen. Daraus erwächst eine gewisse Spannung...

Alle bisherigen Untersuchungen nähren aber die Vermutung, dass der Graph einer quadratischen Funktion stets „ähnlich wie die Normalparabel“ aussieht, nur eventuell verschoben oder in der „Öffnungsweite“ verändert oder nach unten geöffnet. Genauer: Der Graph ist immer achsensymmetrisch bezüglich der vertikalen Achse durch den tiefsten beziehungsweise höchsten Punkt des Graphen, den man *Scheitelpunkt* nennt. Noch präziser formulieren wir hier die folgende Vermutung:

> **Vermutung**
>
> Der Graph einer quadratischen Funktion hat stets ein Extremum, den sog. **Scheitelpunkt**. Es bleibt zu klären, wo dieser Scheitelpunkt genau liegt.
>
> Der Graph ist stets achsensymmetrisch bezüglich der vertikalen Achse durch den Scheitelpunkt.
>
> Der Graph ist nach oben geöffnet, falls $a > 0$ ist, und nach unten, falls $a < 0$ ist.
>
> Der Graph ist stets „ähnlich zur Normalparabel“, eventuell verschoben und/oder gestreckt oder gestaucht.

Diese Vermutung zu beweisen und die darin nur vage ausgedrückten Details zu präzisieren, ist das Ziel des nun folgenden Abschnittes.

Bezüglich der oben formulierten Vermutung können wir nun absolute Sicherheit erlangen und gleichzeitig die vagen Punkte präzisieren. Dazu nehmen wir an, es liege uns eine beliebige quadratische Funktion

$$f : x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

vor. Wir führen mit dem Funktionsterm eine quadratische Ergänzung durch und erhalten:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \cdot \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{V} + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{H} . \end{aligned} \qquad (\star)$$

Wir haben den Funktionsterm nun also dargestellt als Summe eines ver-a-fachten vorderen Terms V und eines hinteren Terms H. Was können wir über die einzelnen Bestandteile von $(\star)$ aussagen? Nun, sicherlich ist H konstant, also unabhängig von x, weil die Unbekannte darin gar nicht vorkommt. Und V ist grösser oder gleich 0, egal, welche Zahl man für x einsetzt. V nimmt also seinen kleinsten Wert (nämlich 0) an, falls wir für x die Zahl $-b/(2a)$ einsetzen. Und für jede andere Belegung der Variablen wird $V > 0$ sein und desto grösser, je weiter sich x von diesem Wert entfernt.

Da a eine beliebige reelle Zahl ausser 0 sein darf, empfiehlt sich eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $a > 0$

   In diesem Fall ist H der kleinstmögliche Wert, den der Term $(\star)$ überhaupt annehmen kann, nämlich einzig dann, wenn wir für x die Zahl $-b/(2a)$ einsetzen. Dann nämlich verschwindet V. Die Funktion f hat also ein Minimum: Dem Input $x = -b/(2a)$ wird der kleinstmögliche Funktionswert $c - b^2/(4a)$ zugeordnet.

2. Fall: $a < 0$

In diesem Fall ist H der grösstmögliche Wert, den der Term ($\star$) überhaupt annehmen kann, nämlich einzig dann, wenn wir für x die Zahl $-b/(2a)$ einsetzen. Dann nämlich verschwindet V. Die Funktion f hat also ein Maximum: Dem Input $x = -b/(2a)$ wird der grössstmögliche Funktionswert $c - b^2/(4a)$ zugeordnet.

Merke:

Der Graph der quadratischen Funktion

$$f : x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$, und nach unten geöffnet, wenn $a < 0$ ist.

Der Graph hat genau ein Extremum, nämlich den Scheitelpunkt S mit den Koordinaten

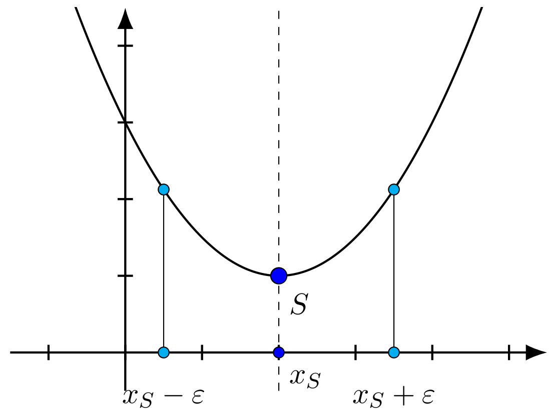
$$S = (x_S, y_S) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Und weiter: Wir vermuten ja noch eine Achsensymmetrie des Graphen bezüglich der vertikalen Achse durch den Scheitelpunkt, also bezüglich der Geraden $x = x_S$. Wie können wir diese Symmetrie nachweisen?

Ganz einfach: Wenn wir zwei Inputs wählen, einen links und einen rechts von der Stelle $x = x_S$ auf der x-Achse, aber so, dass sie gleich weit entfernt von der x-Koordinate des Scheitelpunktes sind, dann erwarten wir gleiche Outputs. Wir erwarten also, dass

$$f(x_S - \varepsilon) = f(x_S + \varepsilon)$$

sein wird für eine beliebige reelle Zahl ε.



In der quadratisch ergänzten Form der Funktionsgleichung lässt sich das besonders elegant nachweisen:

$$\begin{aligned} f(x_S - \varepsilon) &= f\left(-\frac{b}{2a} - \varepsilon\right) \\ &= a \cdot \left(-\frac{b}{2a} - \varepsilon + \frac{b}{2a}\right)^2 + H \\ &= a \cdot (-\varepsilon)^2 + H. \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned} f(x_S + \varepsilon) &= f\left(-\frac{b}{2a} + \varepsilon\right) \\ &= a \cdot \left(-\frac{b}{2a} + \varepsilon + \frac{b}{2a}\right)^2 + H \\ &= a \cdot \varepsilon^2 + H. \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider Terme macht klar, dass in der Tat

$$f(x_S - \varepsilon) = f(x_S + \varepsilon)$$

gilt, wie behauptet.

Merke:

Der Graph der quadratischen Funktion

$$f : x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

ist achsensymmetrisch bezüglich der vertikalen Achse

$$x = x_S = -\frac{b}{2a}.$$

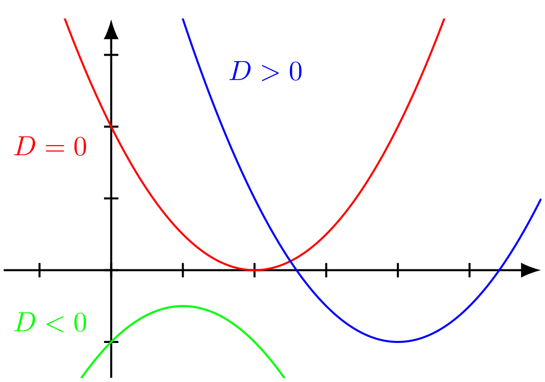
Damit ist schon viel gewonnen. Allein aufgrund der Koeffizienten der quadratischen Funktion können wir mühelos entscheiden, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist und wie die Koordinaten des Scheitelpunktes lauten. Als weitere leicht zu erreichende Information bieten sich die Nullstellen an. Um diese zu finden, müssen wir die Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

lösen, und dabei können bekanntlich die folgenden drei Fälle eintreten: Die Diskriminante

$$D := b^2 - 4ac$$

kann $D < 0$, $D = 0$ oder $D > 0$ sein. Und dies hat - wenig überraschend - auch Konsequenzen für den Graphen.



Im Falle $D > 0$ schneidet die Parabel die x-Achse an zwei Stellen; es gibt also zwei Nullstellen. Im Falle $D = 0$ liegt der Scheitelpunkt auf der x-Achse, es gibt also nur eine Nullstelle. Und im Falle $D < 0$ schneidet die Parabel die x-Achse gar nicht; es gibt also keine Nullstelle.

Beispiele

Es ist höchste Zeit, ein paar besonders lehrreiche Fragestellungen zu betrachten.

Beispiel 1

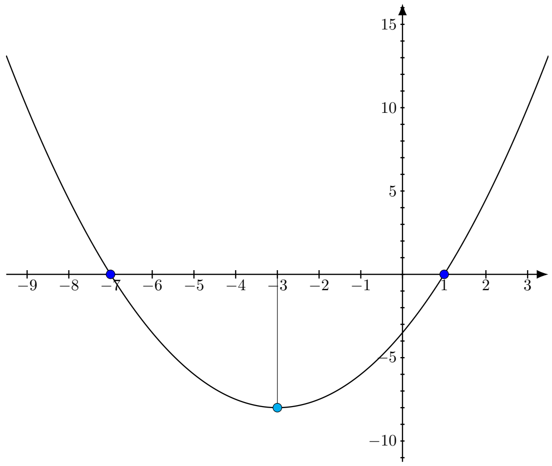
Sei $f : x \mapsto 0.5x^2 + 3x - 3.5$. Dies ist eine Polynomfunktion 2. Grades mit den Koeffizienten $a = 0.5$, $b = 3$ und $c = -3.5$. Wegen $a > 0$ ist die zugehörige Parabel nach oben geöffnet, und sie hat den Scheitelpunkt

$$\begin{aligned} S &= \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{2 \cdot 0.5}, -3.5 - \frac{3^2}{4 \cdot 0.5}\right) \\ &= (-3, -8). \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung

$$0.5x^2 + 3x - 3.5 = 0.$$

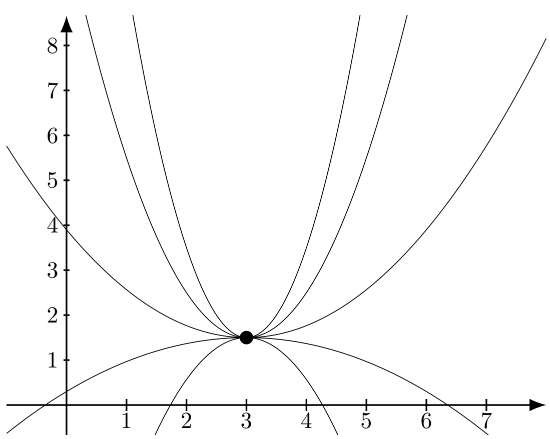
Wegen $D > 0$ gibt es zwei solche, nämlich $x_1 = -7$ und $x_2 = 1$. Schon allein durch die Nullstellen und den Scheitelpunkt und die Information $a > 0$ gewinnen wir eine sehr deutliche Vorstellung vom Graphen.



Beispiel 2

Die quadratisch ergänzte Form ($\star$), in die wir die Normalform der quadratischen Funktion umgeformt haben, hat einen weiteren Vorteil:

Beabsichtigen wir nämlich, die Funktionsgleichung einer ganz bestimmten Parabel mit einem ganz bestimmten Scheitelpunkt zu finden, so können wir das Verfahren gewissermassen rückwärts anwenden. Soll der Scheitelpunkt zum Beispiel $S = (3, 1.5)$ sein, so nimmt ($\star$) die folgende Form an: $f(x) = a \cdot (x-3)^2 + 1.5$. Freilich gibt es unendlich viele Parabeln mit einem bestimmten Scheitelpunkt, so dass wir zur Festlegung eine weitere Information benötigen.



Diese fehlende Information könnte etwa ein weiterer Punkt sein. Verlangen wir zum Beispiel, dass unsere Parabel überdies durch den Punkt $(5, 12)$ führen soll, so lässt sich der Parameter a festlegen. Denn nun muss die Gleichung

$$12 = a \cdot (5-3)^2 + 1.5$$

erfüllt sein, woraus sich $a = 2.625$ ergibt. Die quadratische Funktion, deren Graph den Scheitelpunkt $(3, 1.5)$ hat und überdies durch den Punkt $(5, 12)$ führt, kann also durch die folgende Funktionsgleichung ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2.625 \cdot (x-3)^2 + 1.5 \\ &= 2.625x^2 - 15.75x + 25.125. \end{aligned}$$

Beispiel 3

Wirft man eine Masse mit einer bestimmten Startgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben, so folgt die Höhe der Masse abhängig von der Zeit in guter Näherung der folgenden Funktion:

$$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Wie könnte ein Physiker damit umgehen? Nun, er könnte argumentieren, dass ohne Erdanziehung die Geschwindigkeit immer konstant gleich v_0 bleiben würde, dass dank der Erdanziehung die Geschwindigkeit aber pro Sekunde um 9.81m/s abnimmt, so dass also

$$v(t) = v_0 - g \cdot t$$

gilt. Er könnte zudem feststellen, dass am höchsten Punkt, wo die Masse umkehrt, die Geschwindigkeit gleich 0 sein muss, so dass wir also den Zeitpunkt der Umkehr so finden können:

$$v(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 - g \cdot t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}.$$

Die maximale Höhe erreicht der Körper also genau zu diesem Zeitpunkt, das heisst, es ist

$$h_{\max} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}.$$

Schliesslich könnte er betonen, dass die Masse wieder „unten“ ankommt, wenn zum zweiten Mal $h(t) = 0$ ist. Und dies passiert zum Zeitpunkt $(2v_0)/g$.

Wie könnte eine Mathematikerin mit dieser Formel umgehen? Sie könnte feststellen, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt und dass die Parabel nach unten geöffnet ist, weil

$$a = -\frac{1}{2} g < 0.$$

Die Parabel hat also ein Maximum, nämlich den Scheitelpunkt, und diesen können wir mit der Scheitelpunktformel berechnen:

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(\frac{v_0}{g}, 0 - \frac{v_0^2}{-2g}\right).$$

Die Bedeutung dieses Punktes ist, dass die Masse zum Zeitpunkt $t = v_0/g$ die maximale Höhe $v_0^2/(2g)$ erreicht.

Und sie könnte ergänzen, dass die grössere der beiden Nullstellen darüber Auskunft gibt, zu welchem Zeitpunkt die Masse wieder „unten“ ankommt. Die Nullstellen errechnet man so:

$$\begin{aligned} h(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t \cdot \left(v_0 - \frac{1}{2} g \cdot t\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t \in \left\{0, \frac{2v_0}{g}\right\}. \end{aligned}$$

Wir sehen deutlich, dass der Physiker und die Mathematikerin zur gleichen Erkenntnis gelangen, dass die „Sprache“ aber eine etwas andere ist. Und es ist besonders wichtig, dass wir beide Vorgehensweisen gut verstehen weil Physiker und andere Naturwissenschaftlerinnen und Naturwissenschaftler sehr oft Mathematik verwenden, sich jedoch jeweils einer etwas anderen Sprache befleissigen.

Beispiel 4

Angenommen, wir haben eine Firma gegründet, die neue und modische Hüllen für Mobiles produziert. Interne Analysen haben ergeben, dass wir je nach Produktionsgrösse x (in 1000 Stück) die einzelne Hülle zum Preis

$$P(x) = -0.75x + 57.5 \qquad \text{(Geldeinheiten)}$$

anbieten können. Produzierbar sind ferner Stückzahlen der Grössenordnung $10 \leqslant x \leqslant 50$.

Weiter zeigen diese Analysen, dass bei einer Produktionsgrösse x (variable und fixe) Kosten in der Höhe von

$$K(x) = 0.2x^2 + x + 1.5$$

(in 1000 Geldeinheiten) anfallen. Bei welcher Produktionsgrösse ist der grösstmögliche Gewinn zu erwarten?

Nun, den Gewinn errechnet man aus den gesamten Einnahmen abzüglich Kosten. Also:

$$\begin{aligned} G(x) &= x \cdot P(x) - K(x) \\ &= x \cdot (-0.75x + 57.5) - (0.2x^2 + x + 1.5) \\ &= -0.95x^2 + 56.5x - 1.5. \end{aligned}$$

Die Gewinnfunktion ist (hier) also eine quadratische Funktion, und wegen $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet und hat einen höchsten Punkt, den Scheitelpunkt. Welche Bedeutung haben die Koordinaten des Scheitelpunktes?

Die x-Koordinate ist die optimale Produktionsgrösse, und die y-Koordinate gibt den maximalen Gewinn an:

$$\begin{aligned}
S &= \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= \left(\frac{56.5}{1.9}, -1.5 - \frac{56.5^2}{-3.8}\right) \\
&\approx (30, 839).
\end{aligned}$$

Bei einer Produktionsgrösse von $30'000$ Stück ist also der maximale Gewinn von $839'000$ Geldeinheiten zu erwarten.