Lineare Funktionen

[Grundlagen]

Armin P. Barth

ETH zürich

Wir haben bisher viel darüber gesagt, was eine Funktion ist, worauf zu achten ist, wenn man sie graphisch darstellt und mit welchen Fachbegriffen ein einfacher Steckbrief der Funktion formuliert werden kann. Nur am Rande gestreift haben wir die Frage, welche Funktionstypen in der Praxis besonders häufig sind und wie sich wichtige Erkenntnisse über sie gewinnen lassen. Tatsächlich begegnen uns gewisse Typen von Funktionen immer und immer wieder, so dass es sich lohnt, alles Wissenswerte über sie herauszufinden.

Wir beginnen hier mit dem zweifellos einfachsten Funktionstyp, der linearen Funktion. Alles Nützliche über solche Funktionen herauszufinden, hat den Vorteil, dass immer dann, wenn uns ein Beispiel einer *linearen Funktion* begegnet, wir sofort das vorher erarbeitete allgemeine Wissen heranziehen können, um damit alle Details der Beispielfunktion richtig interpretieren zu können. Wir lernen also etwas über die *allgemeine lineare Funktion*, um dieses allgemeine Wissen dann in allen Beispielen konkretisieren zu können. Man könnte auch sagen: Indem wir die allgemeine lineare Funktion verstehen, verstehen wir auf einen Schlag unendlich viele Einzelfälle; diese Vorgehensweise ist also überaus effizient.

Definition:
Eine Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = a \cdot x + b$$

(wobei a, b beliebige reelle Zahlen sind mit $a \neq 0$), heisst ***lineare Funktion*** *oder* ***Polynomfunktion 1. Grades****.*

Was heisst es, alles Wesentliche über die allgemeine lineare Funktion herauszufinden? Wie soll eine befriedigende Antwort auf diese Frage aussehen? Nun, höchst willkommen wären natürlich Erkenntnisse wie „Jede lineare Funktion hat die und die Eigenschaft“ oder „Der Graph einer linearen Funktion hat immer die und die Eigenschaft“ oder „Unabhängig davon, welche konkreten Zahlwerte die Parameter a und b annehmen, sie haben immer die und die Bedeutung“. Um solche Erkenntnisse sollten wir uns also bemühen.

Wir müssen über Steigung reden

Der USA-Urlaub von Alice und Bob führt die beiden auch nach San Francisco. Dort freuen sie sich unter anderem auf die Filbert Street, die gemäss Reiseführer zu den steilsten Strassen der Welt gehört. Sie soll eine Steigung von sage und schreibe $31.5\% = 0.315$ haben. (Die steilste Strasse der Welt ist übrigens die Baldwin Street in Dunedin, Neuseeland, mit einer Steigung von $38.3\% = 0.383$.) Was genau bedeuten diese Prozentangaben?

Eine in einem Koordinatensystem abgebildete Gerade - und eine Strasse kann durchaus lokal als Geradenausschnitt interpretiert werden - wird häufig durch ihre Steigung charakterisiert. Die *Steigung* einer Geraden gibt darüber Auskunft, um wie viel die Gerade in y-Richtung ansteigt, wenn man sich um eine Längeneinheit in x-Richtung bewegt. Eine Steigung von 31.5% beziehungsweise 0.315 bedeutet also, dass die Gerade auf 1 Längeneinheit in x-Richtung 0.315 Längeneinheiten in y-Richtung anwächst. Also:

> Auf 1 Meter in x-Richtung 0.315 Meter in y-Richtung - oder
>
> auf 100 Meter in x-Richtung 31.5 Meter in y-Richtung - oder

auf 2 Einheiten in x-Richtung 0.630 Einheiten in y-Richtung - oder

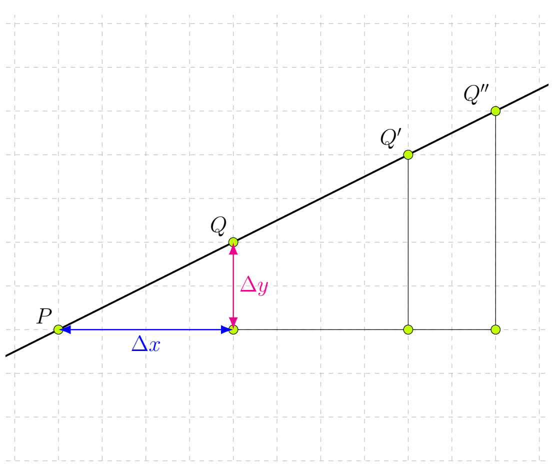
auf einen halben Meter in x-Richtung 0.1575 Meter in y-Richtung

und so weiter. Dabei fällt uns auf, dass es nur auf das Verhältnis ankommt. Unter *Steigung* versteht man also das Verhältnis des Vertikalunterschieds zum Horizontalunterschied oder - in anderen Worten - das Verhältnis der Outputänderung zur Inputänderung. Und wenn die Inputänderung 1 ist, dann gibt die Steigung gerade den Zuwachs in y-Richtung an.

Definition:
*Unter der **Steigung einer Geraden** versteht man das Verhältnis $\Delta y/\Delta x$. Falls $\Delta x = 1$, so gibt die Steigung gerade den Zuwachs in y-Richtung an.*

Ist die Gerade durch zwei Punkte P und Q gegeben, so ist $\Delta y = y_Q - y_P$ und $\Delta x = x_Q - x_P$, und die Steigung ist gegeben durch das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$



Eine Gerade, die auf 3 Einheiten in x-Richtung, 15 Einheiten in y-Richtung ansteigt, hat also eine Steigung von 5, weil $\Delta y = 15$ und $\Delta x = 3$ und das Verhältnis dieser Änderungen gleich 5 ist. Folgerichtig hat dann eine Gerade, die auf 3 Einheiten in x-Richtung 15 Einheiten in y-Richtung *abfällt*, die Steigung -5. Die Outputänderung ist ja $\Delta y = -15$, also negativ. Während man aber in der Alltagssprache in diesem Fall eher von einem Gefälle sprechen würde, spricht man in der Mathematik weiterhin von der Steigung, nur dass die Steigung hier eben negativ ist. Die Steigung der Geraden ist also positiv, wenn die Funktion streng monoton wächst, und negativ, wenn sie streng monoton fällt. Natürlich ist die Steigung gleich 0, wenn die Gerade parallel zur x-Achse ist, weil hier, unabhängig davon, welche beiden Punkte P und Q man herausgreift, $\Delta y = 0$ ist.

Ein häufig gehörtes Missverständnis im Zusammenhang mit dem Steigungskonzept ist die Annahme, dass eine vertikale (parallel zur y-Achse verlaufende) Gerade Steigung $100\% = 1$ hat. Das kann natürlich nicht stimmen. Nach obiger Definition von Steigung kann die Steigung nur dann 1 sein, wenn $\Delta y = \Delta x$ ist, denn nur dann ist das Verhältnis der beiden Änderungen gleich 1. Dies aber ist der Fall, wenn die Gerade mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschliesst. Ein Bergsteiger, der damit prahlt, eine Wand mit 100% Steigung erklommen zu haben, muss uns also nicht besonders beeindrucken; 100% ist zwar steil, aber durchaus ohne Seile und Haken machbar.

Eine vertikale Gerade dagegen hat keine definierte Steigung. Denn egal, welche beiden Punkte P und Q man herausgreift, stets ist $\Delta x = 0$, und das Verhältnis $\Delta y/\Delta x$ hat somit keinen definierten Wert, weil eine Division durch 0 erfolgt. Denkt man sich die Gerade immer steiler und steiler, ohne dass sie aber je vertikal wird, so wird die Steigung einfach immer nur grösser werden; eine Gerade mit Steigung 1‘000‘000 beispielsweise steigt auf eine Längeneinheit in x-Richtung 1‘000‘000 Längeneinheiten in y-Richtung an, ist also „fast vertikal“, aber eben nicht ganz.

Welche Bedeutung haben die Parameter a und b?

Es ist klar, dass das Konzept der Steigung eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit linearen Funktionen spielt. Das lässt sich nun präzisieren, indem wir der Frage auf den Grund gehen, welche Bedeutung die beiden Parameter a und b genau haben. Zwei Argumente liefern die nötigen Einsichten:

Erstens: Wertet man eine lineare Funktion an der Stelle 0 aus, so erhält man

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b.$$

Der Parameter b hat also gerade die Bedeutung des y-Achsenabschnitts. Ein Blick auf die Funktionsgleichung genügt folglich, um zu wissen, wo genau der Graph der Funktion die y-Achse schneidet, nämlich im Punkt $(0, b)$.

Zweitens: Betrachten wir einmal den Funktionswert an einer beliebigen Stelle x und an einer etwas späteren Stelle $x + \Delta x$:

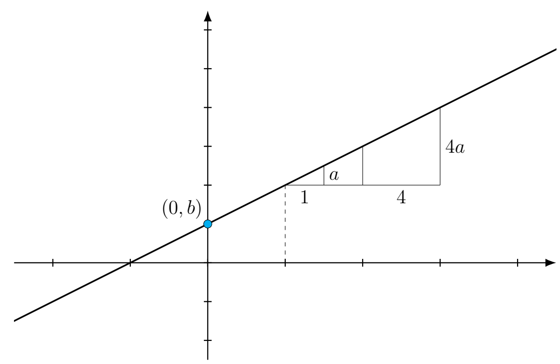
$$f(x) = a \cdot x + b$$

und

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= a \cdot (x + \Delta x) + b \\ &= a \cdot x + a \cdot \Delta x + b \\ &= f(x) + a \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass eine Inputänderung von Δx stets eine Outputänderung von $\Delta y = a \cdot \Delta x$ bewirkt. Erhöht man also x um 1 (das heisst, ist $\Delta x = 1$), so verändert sich der Funktionswert um a, erhöht man x um 4, so verändert sich der Funktionswert um $4a$, und so weiter. Insbesondere wird klar, dass der Graph einer linearen Funktion stets eine Gerade sein muss. Und die Steigung dieser Geraden ist gerade a, weil

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = a.$$



Merke:

Der Graph einer linearen Funktion $f(x) = a \cdot x + b$ ist stets eine Gerade.

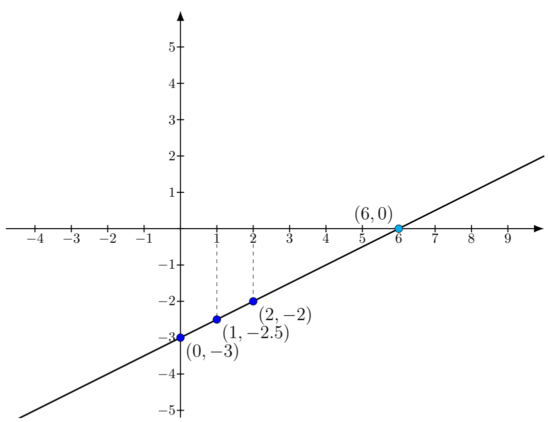
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0, b)$; b ist also gerade der y-Achsenabschnitt.

Der Graph hat die Steigung a.

Nicht von ungefähr heissen Funktionen mit solchen Graphen *linear*: Lateinisch „linea“ bedeutet Richtschnur, Faden, Strich. Wenn wir bei linearen Funktionen also an eine gespannte Leine denken, dann haben wir stets die richtige Vorstellung des Graphen im Kopf.

Betrachten wir gleich zwei Beispiele:

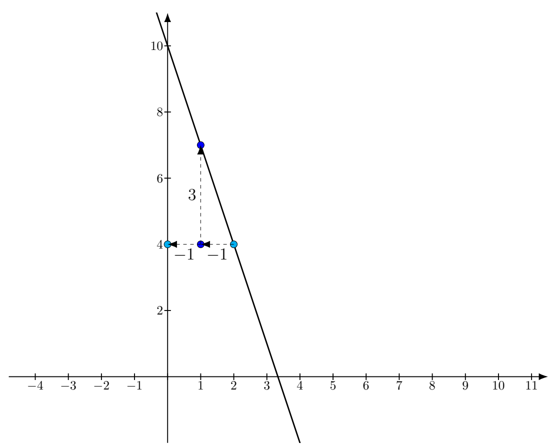
Angenommen, wir begegnen der linearen Funktion $f(x) = 0.5x - 3$. Indem wir feststellen, dass $a = 0.5$ und $b = -3$ ist und das eben erarbeitete allgemeine Wissen heranziehen, sehen wir sofort, dass der Graph dieser Funktion eine Gerade sein muss, die die y-Achse im Punkt $(0, -3)$ schneidet und überdies die Steigung 0.5 hat. Den einen gegebenen Punkt können wir sicher schon einmal im Koordinatensystem eintragen. Wie aber benutzen wir die Steigung, um die ganze Gerade skizzieren zu können? Nun, Steigung 0.5 bedeutet ja, dass eine Inputänderung von 1 eine Outputänderung von 0.5 nach sich zieht, oder dass eine Inputänderung von 10 eine Outputänderung von 5 nach sich zieht, und so weiter. Wir können somit beliebig viele weitere Graphenpunkte auflisten: $(1, -2.5)$, $(2, -2)$, $(3, -1.5)$, $\ldots$, $(6, 0)$, $\ldots$, $(10, 2)$, $\ldots$



Mit etwas Übung kann man so aus der Kenntnis der Funktionsgleichung den Graphen schnell und mühelos entstehen lassen.

Untersuchen wir zweitens das Beispiel, dass eine Gerade durch die beiden Punkte $P(2, 4)$ und $Q(4, -2)$ gegeben ist und dass wir nach der Gleichung der Funktion suchen, die genau diese Gerade zum Graphen hat. Wir wissen, dass wir in der Klasse der linearen Funktionen suchen sollten, dass die gesuchte Funktion also die Form $f(x) = a \cdot x + b$ haben wird. Bloss, was sind a und b?

Nun, die Steigung lässt sich leicht aus der Tatsache ableiten, dass eine Inputänderung von 2 ($\Delta x = 4 - 2 = 2$) eine Outputänderung von -6 ($\Delta y = -2 - 4 = -6$) verursacht. Die Steigung ist also $a = -3$. In welchem Punkt schneidet die Gerade die y-Achse? In diesem Fall können wir leicht „zurück rechnen“: Wenn eine Erhöhung von x um 1 eine Verkleinerung des Funktionswertes um 3 bewirkt, dann muss eine Verkleinerung von x um 1 eine Vergrösserung des Funktionswertes um 3 bewirken. Und da die Gerade sicher durch den Punkt $P(2, 4)$ führt, ist also $b = f(0) = 4 + 2 \cdot 3 = 10$. Somit ist $f(x) = -3x + 10$.



Falls uns dieser Weg zu beschwerlich ist oder Zahlen vorliegen, mit denen sich nicht leicht rechnen lässt, so können wir die Werte von a und b leicht durch Lösen eines linearen Gleichungssystems finden: Dass die Punkte P und Q auf dem Graphen der Funktion liegen, bedeutet ja, dass einerseits $4 = a \cdot 2 + b$ und andererseits $-2 = a \cdot 4 + b$ für ein Paar von Zahlen a und

b gelten muss. Folglich ist das Tupel (a, b) die eine eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{rcl} 4 & = & a \cdot 2 + b \\ -2 & = & a \cdot 4 + b \end{array} \right|$$

Häufig gestellte Fragen

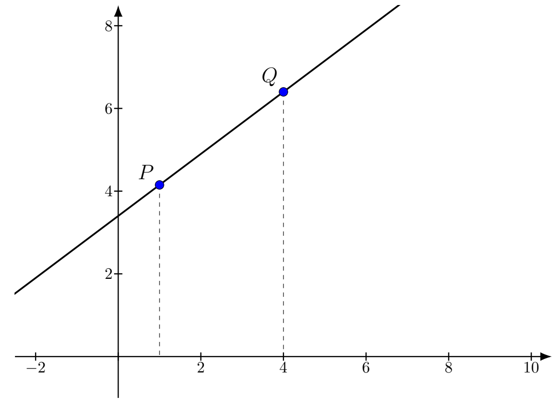
Wie skizziert man den Graphen einer linearen Funktion?

Eine Studie behauptet, dass in den ersten Monaten nach der Geburt das durchschnittliche Gewicht eines Kleinkindes eine lineare Funktion der Lebensdauer ist, genauer, dass

$$y = 0.75x + 3.4.$$

wobei x die Lebenszeit in Monaten und y das Gewicht in Kilogramm ist. Um diese Behauptung besser beurteilen zu können, beschliessen wir, den Graphen zu untersuchen. Wie also zeichnen wir die Funktion effizient auf?

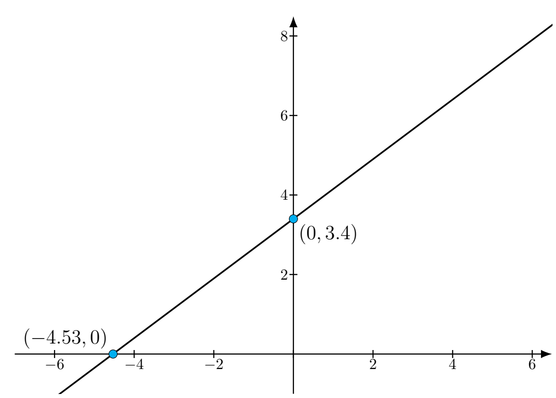
Dafür bieten sich gleich mehrere Wege an: Wir können zwei Graphenpunkte P und Q bestimmen, indem wir für x zwei beliebige (aber vernünftige) Werte einsetzen. Zum Beispiel ergibt sich für $x = 1$ das Gewicht 4.15, während für $x = 4$ das Gewicht 6.4 entsteht. Wir wissen also mit Sicherheit, dass die Punkte $P(1, 4.15)$ und $Q(4, 6.4)$ auf dem Graphen liegen. Da der Graph ferner eine Gerade sein muss, brauchen wir bloss noch P und Q linear zu verbinden.



Eine Variante dieser Methode entsteht, wenn man nicht zwei beliebige Punkte des Graphen bestimmt, sondern zwei ganz spezielle, nämlich die Schnittpunkte mit den beiden Achsen. Wir wissen, dass der Graph einer linearen Funktion die y-Achse im Punkt $(0, b)$ schneidet. In unserem Beispiel ist also $(0, 3.4)$ sicherlich ein Graphenpunkt. Weiter: Falls nicht gerade $a = 0$ ist, schneidet der Graph die x-Achse in der einzigen Nullstelle. Diese berechnen wir mühelos:

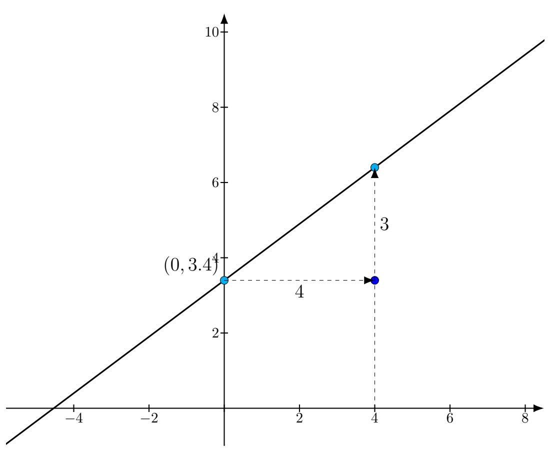
$$\begin{array}{rcr} y = 0 & \Leftrightarrow & 0.75x + 3.4 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x = -4.5\bar{3}. \end{array}$$

Damit haben wir einen weiteren Graphenpunkt gewonnen, nämlich $(-4.5\bar{3}, 0)$. Und wiederum entsteht der Graph einfach durch das lineare Verbinden beider nun erarbeiteter Punkte.



Freilich sind wir uns bewusst, dass hier weder Funktion noch Graph für negative x-Werte sinnvoll ist.

Der wahrscheinlich eleganteste Weg besteht darin, die Bedeutung der beiden Parameter a und b auszunützen: Da b der y-Achsenabschnitt ist, können wir den Punkt $(0, 3.4)$ sofort einzeichnen. Und da a die Steigung ist, wissen wir, dass unser Graph auf 1 Einheit in x-Richtung um 0.75 in y-Richtung ansteigt - oder dass er auf 4 Einheiten in x-Richtung um 3 Einheiten in y-Richtung ansteigt. Damit ergibt sich der Graph ganz leicht:



Liegt der Punkt auf der Geraden?

Eine sich häufig stellende Frage ist, ob ein bestimmter Punkt auf dem Graphen einer bestimmten linearen Funktion liegt oder nicht. Angenommen, die lineare Funktion $y = -1.5x + 4$ sei gerade Gegenstand unserer Untersuchungen, und wir wollen wissen, ob der Punkt $P(80, -116)$ auf dem Graphen liegt. Nun, ganz einfach: P liegt genau dann auf dem Graphen, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen. Und das trifft zu, denn:

$$-1.5 \cdot 80 + 4 = -116.$$

Dieselbe Frage mit dem Punkt $P(-4, 11)$ hätte zur gegenteiligen Antwort geführt, denn

$$-1.5 \cdot (-4) + 4 \neq 11.$$

Wie bestimmt man die Funktionsgleichung aus zwei gegebenen Punkten?

Dieser Frage sind wir weiter oben schon in einem Beispiel begegnet. Wir beantworten sie nun allgemein, indem wir annehmen, dass wir diejenige lineare Funktion suchen, deren Graph durch die beiden gegebenen Punkte $P(x_1, y_1)$ und $Q(x_2, y_2)$ führt. Dabei setzen wir natürlich voraus, dass $x_1 \neq x_2$ ist.

Die beiden gegebenen Punkte erlauben sofort das Berechnen der Steigung, denn wir kennen zu einer bestimmten Inputänderung die zugehörige Outputänderung. Genauer: Wir wissen, dass die Inputänderung $x_2 - x_1$ zur Outputänderung $y_2 - y_1$ führt; folglich ist die Steigung gleich

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Von der gesuchten Funktionsgleichung wissen wir nun also schon dies:

$$y = a \cdot x + b \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

aber wir kennen b noch nicht. Erst die richtige Steigung haben wir realisiert, und es gibt natürlich unendlich viele Geraden mit dieser Steigung. Von all diesen unendlich vielen Geraden suchen wir nun diejenige, die durch den einen der beiden Punkte (und damit durch beide Punkte) führt. Das heisst, die Funktionsgleichung muss erfüllt sein, wenn wir die Koordinaten des einen (oder anderen) Punktes einsetzen:

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + b.$$

Daraus ergibt sich

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1.$$

Damit sind sowohl Steigung als auch y-Achsenabschnitt bekannt. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch folgende Überlegung:

Ist die Steigung a schon bekannt - und wir haben oben gezeigt, wie sie sich bestimmen lässt - dann müssen wir die Funktionsgleichung nun zweitens so umbauen, dass sie durch die Koordinaten des einen oder anderen Punktes erfüllt wird. Das lässt sich offenbar so bewerkstelligen:

$$\begin{aligned} & y = a \cdot (x - x_1) + y_1 \\ \text{(oder} \quad & y = a \cdot (x - x_2) + y_2). \end{aligned}$$

Wir erkennen auf einen Blick, dass die Funktion linear mit Steigung a ist und dass für $x = x_1$ der Output y_1 entsteht. Der Graph führt also tatsächlich durch den einen (und damit auch durch den anderen) Punkt.

Merke:

Um diejenige lineare Funktion $y = a \cdot x + b$ zu finden, deren Graph durch die beiden gegebenen Punkte $P(x_1, y_1)$ und $Q(x_2, y_2)$ (mit $x_1 \neq x_2$) führt, können wir erst die Steigung bestimmen:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Danach findet man b dadurch, dass man die Koordinaten des einen oder anderen Punktes in den Ansatz $y = a \cdot x + b$ einsetzt und nach b auflöst.

Noch einfacher: Ist die Steigung berechnet, so kann man die gesuchte Funktionsgleichung sofort hinschreiben:

$$y = a \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Welche verschiedenen gegenseitigen Lagen können Graphen zweier linearer Funktionen einnehmen?

Wir haben bisher gut verstanden, welche Eigenschaften eine einzelne lineare Funktion und ihr Graph haben. Ganz neue Fragestellungen entstehen, wenn zwei oder mehr solche Funktionen gleichzeitig vorliegen. Zwei lineare Funktionen ergeben, graphisch dargestellt, zwei Geraden. Welche gegenseitigen Lagen können diese beiden Geraden haben?

Sie können parallel sein (oder gar aufeinander liegen) oder sich schneiden. Wie zeigt sich das in den Funktionsgleichungen? Und wie berechnet man einen allfälligen Schnittpunkt?

Die meisten dieser Fragen können mühelos beantwortet werden. Sagen wir, die beiden linearen Funktionen sind durch die folgenden Funktionsgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} f_1 &: x \mapsto a_1 \cdot x + b_1 \\ f_2 &: x \mapsto a_2 \cdot x + b_2. \end{aligned}$$

Die beiden Geraden liegen natürlich genau dann aufeinander, wenn die beiden Funktionen sowohl in der Steigung als auch im y-Abschnitt übereinstimmen, wenn also $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ ist. Dann ergibt sich für jedes x bei beiden Funktionen derselbe Output.

Die Geraden sind genau dann parallel (und nicht aufeinander liegend), wenn sie in der Steigung übereinstimmen, im y-Abschnitt aber nicht, wenn also $a_1 = a_2$ und $b_1 \neq b_2$ ist.

Die Geraden schneiden sich, wenn die beiden Steigungen verschieden sind. Es ist klar, dass dann genau ein Schnittpunkt S existiert (und nicht etwa mehr als einer). Wie berechnen wir die Koordinaten von S? Nun, der Schnittpunkt ist der einzige Punkt, dessen Koordinaten beide Funktionsgleichungen gleichzeitig erfüllen. Für die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes S gilt also

$$y_S = a_1 \cdot x_S + b_1 \qquad (\star)$$

sowie

$$y_S = a_2 \cdot x_S + b_2. \qquad (\star\star)$$

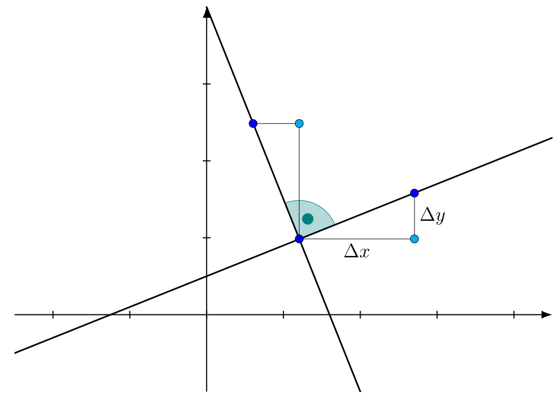
Im Schnittpunkt gilt folglich

$$a_1 \cdot x_S + b_1 = a_2 \cdot x_S + b_2.$$

und daraus lässt sich x_S bequem berechnen. Entweder $(\star)$ oder $(\star\star)$ kann dann dazu verwendet werden, die y-Koordinate des Schnittpunktes zu bestimmen.

Häufig ist schliesslich die Frage, ob sich die beiden Geraden, falls sie sich denn schneiden, unter einem rechten Winkel schneiden oder nicht. Wie können wir das entscheiden? Es scheint klar, dass sich die Orthogonalität der beiden Geraden irgendwie an den beiden Steigungen ablesen lässt. Nur, wie genau?

Ganz leicht lässt sich diese Frage beantworten, wenn wir mit der allgemeinen linearen Funktion $y = a \cdot x + b$ beginnen und zwei beliebige Punkte P und Q auf ihrem Graphen markieren. Die Inputänderung Δx führt auf die Outputänderung Δy. Und die Steigung ist gegeben durch $a = \Delta y / \Delta x$.



Nun stellen wir uns vor, dass wir die Gerade (zum Beispiel um P) mit einem Winkel von 90° rotieren. Dann entsteht eine neue Gerade, die zur ersten senkrecht steht. Was können wir über die Steigung der neuen Geraden aussagen? Nun, die bei der originalen Geraden mit Δx bezeichnete *horizontale* Strecke wird nach der Drehung *vertikal*, und die bei der originalen Geraden mit Δy bezeichnete *vertikale* Strecke wird nach der Drehung *horizontal* sein. Will man also die Steigung der neuen Geraden berechnen, so kann man dieselben Änderungen benutzen wie bei der originalen Geraden, nur mit vertauschten Rollen. Zudem hat aber die neue Gerade negative Steigung, falls die originale positive Steigung hat und umgekehrt. Das bedeutet: Zwei Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihre Steigungen negativ reziprok zueinander sind; die Steigung der einen ist der negative Kehrwert der Steigung der anderen.

MERKE:

Die beiden Graphen von zwei linearen Funktionen $f_1 : x \mapsto a_1 \cdot x + b_1$ und $f_2 : x \mapsto a_2 \cdot x + b_2$

sind identisch, wenn $a_1 = a_2$ und zudem $b_1 = b_2$,

sind parallel, wenn $a_1 = a_2$,

schneiden sich in genau einem Schnittpunkt, wenn $a_1 \neq a_2$; die x-Koordinate des Schnittpunktes findet man durch Lösen der Gleichung $a_1 \cdot x + b_1 = a_2 \cdot x + b_2$,

sind orthogonal, wenn $a_2 = -1/a_1$.