Funktionen Grundlagen

[Grundlagen]

Armin P. Barth

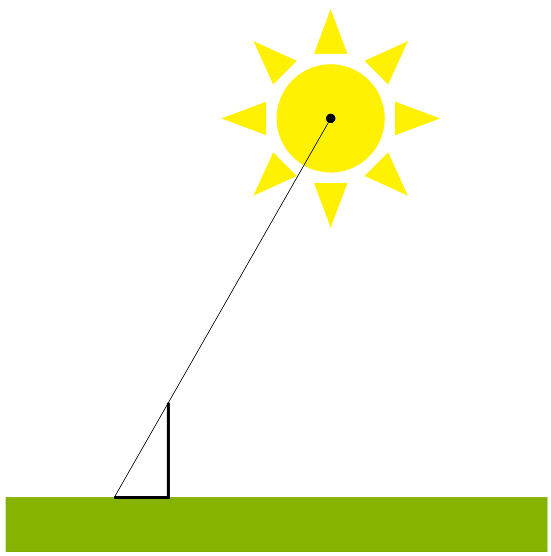
ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 Armin P. Barth

Ein erhellendes Beispiel

Es ist eine ganz alltägliche Erfahrung, dass ein senkrechter Stab bei Sonnenlicht einen Schatten wirft und dass die Länge dieses Schattens abhängig von der Tageszeit ist. Oft sind es diese einfachen Dinge, die einen Menschen zum Nachdenken und schliesslich zu herausragenden Entdeckungen anregen können.



Eratosthenes, diesen überaus vielseitigen griechischen Gelehrten, hat diese Beobachtung um 240 v. Chr., als er die Bibliothek von Alexandria leitete, auf eine verblüffende Idee gebracht: Er rammte in Syene, dem heutigen Assuan, einen Stab in die Erde, der mittags am Tag der Sommersonnenwende keinen Schatten warf, weil die Sonne im Zenit stand. Und er liess zum gleichen Zeitpunkt den Schatten eines ebensolchen in Alexandria positionierten Stabes vermessen. Die Distanz Syene–Alexandria war schon bekannt oder konnte von königlichen Schrittzählern ermittelt werden. Die Messung des Schattens ergab, dass in Alexandria die Sonne zu diesem Zeitpunkt den „fünfzigsten Teil“ eines Vollkreises vom Zenit entfernt war, und daraus schloss Eratosthenes, dass der Erdumfang das Fünfzigfache der Distanz Syene–Alexandria beträgt.

Eratosthenes' Resultat war nicht ganz korrekt, weil einerseits, entgegen seiner Annahme, Syene und Alexandria nicht auf demselben Meridian liegen und weil andererseits der Abstand der beiden Städte nicht mit der heutigen Präzision bestimmt werden konnte. Überdies ist bis heute nicht genau geklärt, wie viele Meter ein *Stadion*, das damals übliche Längenmass, misst. Gleichwohl ist die Idee faszinierend und verdient, wie es der Mathematikhistoriker *Howard Eves* wohl formulieren würde, das Prädikat *„great moment in mathematics“*.

Aus heutiger Sicht lässt sich in die eingangs beschriebe alltägliche Erfahrung das Konzept der Funktion hinein interpretieren. Jeder Tageszeit ist eine Schattenlänge zugeordnet. Die Schattenlänge ist eine Funktion der Tageszeit. Eine Funktion ist - einfach ausgedrückt - nichts anderes als eine Zuordnung, bei der einer bestimmten Grösse eine andere Grösse zugeordnet wird.

Unerschöpflicher Vorrat

Will man Beispiele von Funktionen aufzählen, so ist der Vorrat unerschöpflich: Der Fahrgeschwindigkeit eines Autos lässt sich die Wegstrecke zuordnen, die nach einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird, dem Gewicht einer Ware lässt sich der Preis zuordnen, der dafür zu entrichten ist. Einem beliebigen Jahr lässt sich der durchschnittliche Pro-Kopf-Wasserverbrauch zuordnen, einer beliebigen Zahl lässt sich ihr Quadrat zuordnen. Der Alkoholgehalt im Blut ist eine Funktion der Zeit, die seit der Einnahme verstrichen ist, die Schallstärke ist eine Funktion der Distanz zur Schallquelle. Man hat auch eine Funktion, wenn man verschieden grosse Kugeln betrachtet und immer dem Radius das Kugelvolumen zuordnet, oder wenn man jeder Person einer bestimmten Auswahlgruppe ihre Blutgruppe zuordnet.

Wer hat's erfunden?

Das Konzept der Funktion ist fundamental. Wenn man sehr sehr grosszügig sein will, lässt sich dieses Konzept mindestens bis Eratosthenes zurückverfolgen. Genau genommen gelang es aber erst *Nikolaus von Oresme*, einem französischen Philosophen und Mathematiker des 14. Jahrhunderts, dem heutigen Funktionsbegriff relativ nahe zu kommen. Und definitiv Einzug gehalten in die Welt der Mathematik hat er erst dank *Gottfried Wilhelm Leibniz* am Ende des 17. Jahrhunderts.

Im Zusammenhang mit der Beschreibung von Kurveneigenschaften stiess Leibniz unter anderem auf die Aufgabe, irgendeinem Punkt einer Kurve die dort herrschende Steigung zuordnen zu müssen. Dazu erfand er Funktionen der Art $y = x^2$, die reine Rechenvorschriften waren; befolgte man sie, so erhielt man die gesuchte Steigung zu einer beliebig gegebenen Stelle x. Aus heutiger Sicht muss man sagen, dass die Funktionen, die Leibniz in Betracht zog, zur Klasse der differenzierbaren Funktionen gehören. Der Funktionsbegriff hatte also noch nicht die heute übliche Ausgereiftheit und Allgemeinheit erlangt.

Von *Leonhard Euler* (1707–1783) stammt die erste systematische Darstellung der Funktionenlehre. In seinem Werk *Introductio in analysin infinitorum* aus dem Jahr 1748 notierte er die folgende Definition:

„Eine Funktion einer veränderlichen Zahlgrösse ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Zahlgrösse und aus eigentlichen Zahlen oder aus konstanten Zahlgrössen zusammengesetzt ist.“

Und in seinem Buch *Institutiones calculi differentialis* aus dem Jahr 1755 findet man die Definition

„Sind nun Grössen auf die Art von einander abhängig, dass keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der andern zu bewirken; so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der andern betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, dass sie alle Arten, wie eine Grösse durch andere bestimmt werden kann, unter sich begreift.“

Versuch einer Definition

Wie immer bei mathematischen Konzepten müssen diese ganz präzise und unzweideutig vorliegen. Tauschen sich zwei Wissenschaftler zum Thema Funktionen aus, so sollten beide genau dasselbe unter diesem Begriff verstehen. Das wird in der Regel durch eine Definition (Begriffsbestimmung) erreicht, in der alle Details genauestens festgehalten werden. Die Definition einer Funktion ist - wenigstens auf den ersten Blick - sehr einfach:

Definition:
*Eine **Funktion** ist eine Zuordnung f, die jedem Element x einer ersten Menge $\mathbb{D}$ (**Definitionsmenge** oder **Inputmenge**) nach*

*einer bestimmten Regel oder Formel genau ein Element y oder $f(x)$ (lies: „f von x“) einer zweiten Menge $\mathbb{W}$ (**Wertemenge** oder **Outputmenge** oder **Zielmenge**) zuordnet.*

Anstelle der Buchstaben x, y können durchaus andere (sinnstiftende) Buchstaben verwendet werden. Ebenso können anstelle von f andere Buchstaben oder Zeichenketten benutzt werden.

Betrachten wir einmal einige der oben eingeführten Beispiele mit vergleichendem Blick auf diese Definition:

> Will man jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnen, so kann man dazu eine Funktion f benutzen, die jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ die Zahl $y = f(x) = x^2$ zuordnet. Offenbar ist hierbei $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$.
>
> Bewegt man sich mit der Geschwindigkeit v , so berechnet sich die in der fixen Zeit $\bar{t}$ zurückgelegte Strecke nach der Formel $s = v \cdot \bar{t}$. Wir können also eine Funktion s betrachten, die jeder möglichen Geschwindigkeit $v \geqslant 0$ die zurückgelegte Strecke $s(v) = v \cdot \bar{t}$ zuordnet. Hier ist natürlich $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$.
>
> Will man jedem möglichen Kugelradius r mit $r \geqslant 0$ das Volumen der Kugel mit ebendiesem Radius zuordnen, so kann man eine Funktion V einführen, die jeder reellen Zahl $r \geqslant 0$ den Wert $V(r) = (4\pi)/3 \cdot r^3$ zuweist. Hierbei ist $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$.
>
> Will man jeder Person p einer Menge $\mathbb{P}$ von Personen ihre Blutgruppe zuordnen, so kann man eine Funktion BG benutzen, die jedem $p \in \mathbb{P}$ die Blutgruppe $BG(p)$ zuordnet. Dabei ist offenbar $\mathbb{D} = \mathbb{P}$ und $\mathbb{W} = \{0, A, B, AB\}$.

Genau einer!

Das letzte Beispiel macht deutlich, dass bei einer Funktion zwar jedem Input genau ein Output zugeordnet ist, dass aber durchaus mehrere Inputs - oder gar alle - demselben Output zugeordnet sein dürfen. So kann es in der betrachteten Personengruppe ja mehr als eine Person mit Blutgruppe A geben, etwa $BG(Anna) = BG(Ralph) = BG(Elsbeth) = A$.

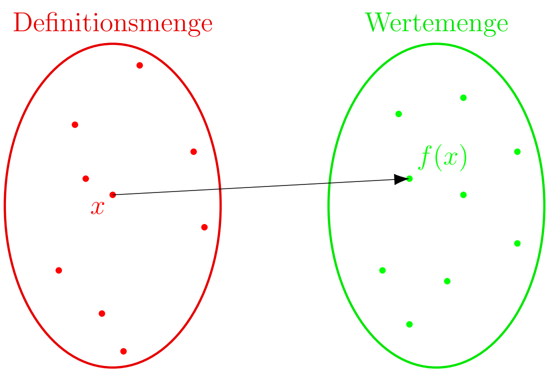
Während früher auch „mehrwertige Funktionen“ benutzt wurden, also Zuordnungen f, unter denen einem x mehrere y-Werte zugewiesen wurden, ist das heute strikte ausgeschlossen; eine solche Mehrdeutigkeit würde zu unnötigen Verkomplizierungen und Fallunterscheidungen führen. Die Zuordnung $y = \pm\sqrt{x}$ wäre also keine Funktion, weil etwa der Zahl $x = 9$ zwei verschiedene Outputs, nämlich 3 und -3, zugeordnet wären.

Bei einer Funktion muss also jedem Element x der Definitionsmenge immer nur genau ein Element y der Wertemenge zugeordnet sein, aber es kann durchaus mehreren x-Werten derselbe y-Wert zugewiesen werden. Und bei diesem letzten Satz ist jedes einzelne Wort wichtig und mit Betonung zu lesen.

So einfach die Definition einer Funktion zu sein scheint, so problematisch wird sie doch bei genauerem Hinsehen. Begriffe wie „Zuordnung“, „Formel“, „Regel“, „Vorschrift“ und so weiter, wie sie etwa bei *Dirichlet*, *Dedekind* und *Cantor* zu finden sind, rufen ja nicht in jedem Leser automatisch dieselben Vorstellungen wach. Man hat später versucht, diese Schwierigkeit zu umgehen, indem man eine Funktion als eine spezielle Relation definierte. Die Funktion ist dann eine Teilmenge des kartesischen Produktes aus Definitions- und Wertemenge, wobei zu jedem Element x der ersten Menge genau ein Element y der zweiten Menge existiert, so dass das Paar $(x; y)$ zur Relation gehört.

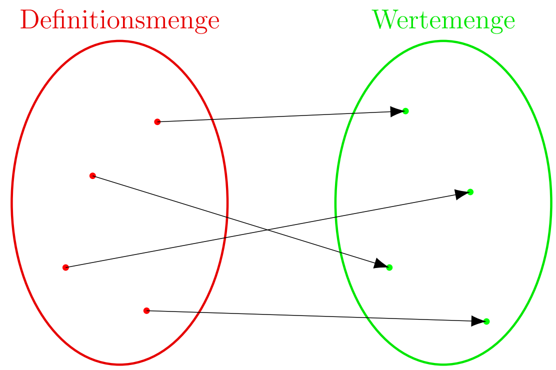
Wolken und Maschinen

Hier sind zwei für die Anschauung nützliche Darstellungshilfen:

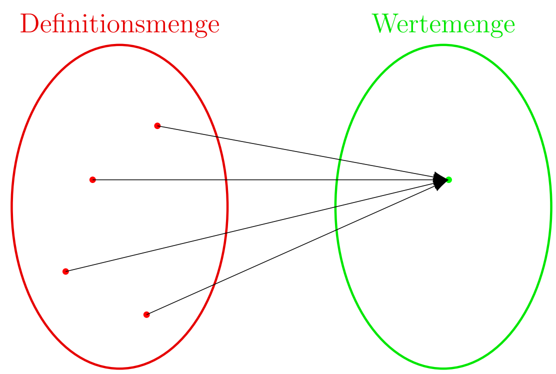


Diese erste wolkenähnliche Darstellung zeigt, wie jedem Element x der ersten Menge, in der man sich alle zulässigen Inputs versammelt denkt, genau ein Element y oder $f(x)$ der zweiten Menge, in der man sich alle Outputs versammelt denkt, zugeordnet wird.

Wir können nun sehr einfach sichtbar machen, welche Art von Zuordnung Funktion genannt wird und welche nicht. Da jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zugeordnet wird, keinesfalls aber einem Element der ersten Menge mehrere Elemente der zweiten, stellen diese beiden Zuordnungen sicherlich Funktionen dar,

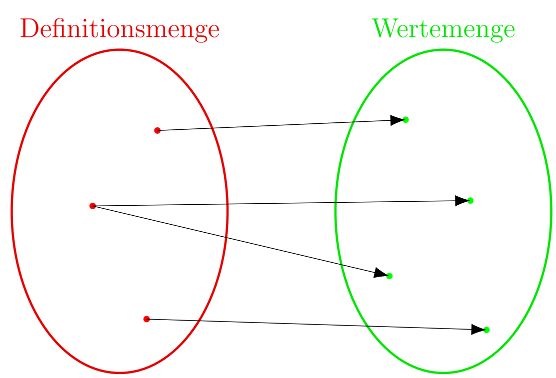


eine Funktion



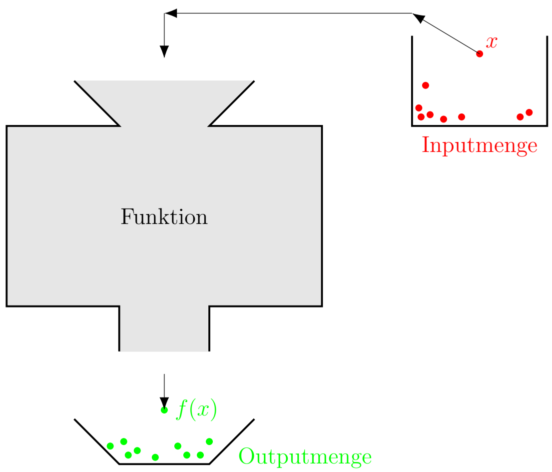
auch eine Funktion

während die folgende Zuordnung aber keine Funktion ist:



keine Funktion

Das zweite eher mechanistische Bild zeigt die Funktion als *verarbeitenden Prozess*, was sehr günstig ist, weil hierbei deutlich wird, dass man eine Funktion auch als ein algorithmisches Verfahren interpretieren kann, in dem ein Input schrittweise in einen Output umgewandelt wird. Der Begriff „Funktion" stammt ja auch von lat. *functio* ab, was ungefähr Verrichtung, Verarbeitung bedeutet.



Ein beliebiges Element x der Menge $\mathbb{D}$ wird in die „Funktionsmaschine" eingefüllt, und dort wird an ihm etwas „verrichtet". Es wird „verarbeitet" zu einem neuen Element, das wir y nennen oder - um die Herkunft von x deutlicher zu machen - $f(x)$. Alle Outputs zusammen kann man sich in der Outputmenge $\mathbb{W}$ versammelt oder aufgefangen denken. Wenn wir hierbei an eine *Umfärbmaschine für Smarties* denken, wäre das gar nicht so schlecht: In der Inputmenge liegen diverse Smarties bereit, unterschiedlich etwa durch Farbe und Grösse. Wir nehmen ein Smarty aus der Inputmenge (aller erlaubten Smarties) und lassen dieses in die Funktionsmaschine fallen. Dort wird es verarbeitet (umgefärbt) und fällt verändert wieder in die Auffangschale. Es wird bei diesem Bild auch klar, dass wir in der Regel darüber nachdenken müssen, welches die erlaubten Inputs sind, welche also der Funktion „gefüttert" werden dürfen und welche nicht. So wäre es ja denkbar, dass gewisse Dinge aus diversen Gründen nicht für die Maschine tauglich sind, etwa, weil sie zu gross oder zu weich und so weiter sind. Es wird später immer wieder wichtig sein, ganz genau zu wissen, aus welchen „Dingen" die Menge eigentlich besteht.

Man könnte sich die Funktion auch so denken, dass sie jedem in ein Hotel eintretenden Gast ein Zimmer zuordnet. Selbstverständlich würde man dann erwarten, dass sie Ehepartnern dasselbe Zimmer zuordnet und nie einander fremde Personen ins gleiche Zimmer schickt. Aus mathematischer Sicht wäre das aber ganz unproblematisch: Die Mathematik interessiert nur, dass jedem ankommenden Gast ein Zimmer zugeordnet wird; ob dabei ganz ungewohnte Durchmischungen von Personen auftreten oder gar alle Personen ins gleiche Zimmer gequetscht werden, ist einerlei.

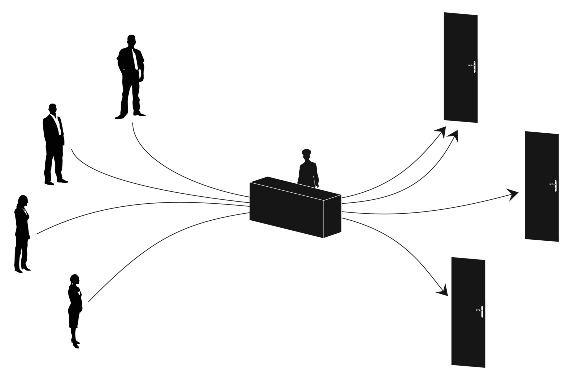


Abbildung 1: Rezeption

Sprechweisen

Im Zusammenhang mit dem Arbeiten mit Funktionen haben sich einige Sprechweisen durchgesetzt, die alle mehr oder weniger verbreitet sind und deren Wahl vom Kontext, von der angestrebten Betonung und vom Geschmack des Benutzers abhängen. Um bei der Lektüre anderer Texte zum Thema Funktionen nicht verwirrt zu sein, sollten wir uns bemühen, uns alle gängigen Sprechweisen einzuprägen

Merke:

Statt **Funktion** wird oft auch der Terminus **Abbildung** verwendet. Will jemand ausdrücken, dass die Funktion f dem Wert x den Funktionswert $f(x)$ zuordnet, so kann das auch so formuliert werden:

> „Unter f wird x auf $f(x)$ **abgebildet**.“
>
> „$f(x)$ ist das **Bild** von x unter f.“
>
> „$f(x)$ ist der Funktionswert **an der Stelle** x.“

Sind alle Funktionswerte einer Funktion reelle Zahlen, so nennt man die Funktion **reellwertig**.

Die Inputvariable x wird oft auch **unabhängige Variable**, die Outputvariable y dagegen **abhängige Variable** genannt. Dadurch wird verdeutlicht, dass wir bei der Wahl des x-Wertes völlig frei sind, dass der Funktionswert aber, wenn x einmal gewählt ist, festgelegt und somit von unserer Wahl abhängig ist.

Ordnet die Funktion dem Wert x den Wert y zu, so heisst x auch das **Urbild** von y.

Die Definitionsmenge heisst oft auch **Definitionsbereich**, **Domain** oder **Urbildmenge**. Statt Wertemenge hört man gelegentlich **Wertebereich**, **Codomain**, **Bildmenge**, **Range** oder **Zielmenge**.

Der Definitionsbereich ist ganz einfach die Menge aller für die Verarbeitung durch die Funktion zulässiger Werte, ganz einerlei, ob es sich dabei um ein Intervall oder eine komplizierter aufgebaute Menge handelt.

Etwas heikler ist die Situation beim Wertebereich. Ist der Wertebereich einfach eine Menge, in die hinein die Funktion abbildet? Oder ist sie exakt die Gesamtheit aller Funktionswerte? Das soll gleich anhand der schon weiter oben betrachteten Funktion $f(x) = x^2$ erläutert werden. Vereinfachend könnte man ja sagen, dass diese Funktion reelle Zahlen liefert, dass sie also in $\mathbb{R}$ hinein abbildet: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$. Aber natürlich ist nicht jede reelle Zahl ein Funktionswert eines geeigneten Inputs x. In der Tat kommt jede negative reelle Zahl gar nicht als Funktionswert vor. Wenn man also genau die Menge aller Funktionswerte angeben will, dann muss man $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$ schreiben.

In der Praxis kommt beides vor. Manchmal nennt man einfach eine Menge, in die hinein die Funktion abbildet, und manchmal möchte man ganz präzis sein und diejenige Menge nennen, die genau aus allen Bildern der Funktion besteht. Darum gibt es auch verschiedene Begriffe für die Wertemenge, teils werden sie aber leider nicht einheitlich verwendet. Immerhin besteht zu den folgenden Begriffen mehrheitlich Konsens:

Meint man einfach eine Menge, in die hinein die Funktion abbildet, und nimmt man in Kauf, dass einige der Elemente gar nicht als Funktionswerte vorkommen, so spricht man meist von der *Zielmenge*. Meint man aber die Menge, die genau aus allen Funktionswerten besteht, so spricht man meist von der *Bildmenge*. Der Begriff *Wertemenge* wird dagegen nicht immer einheitlich benutzt und kann beides bedeuten. Im konkreten Fall muss einfach präzisiert werden, was man meint.

Ein weiteres Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^2 - 5$ liefert reelle Zahlen. Wenn wir nur das betonen möchten, so sagen wir, die Zielmenge sei die Menge der reellen Zahlen, also $\mathbb{W} = \mathbb{R}$. Wenn wir aber die Menge aller möglichen Funktionswerte genau erfassen wollen, dann sagen wir, die Bildmenge sei die Menge aller reellen Zahlen, welcher grösser oder gleich -5 sind, also $\mathbb{W} = [-5, \infty[$. In jedem der beiden Fälle hört man aber ab und zu den Begriff Wertemenge.

Schreibweisen

Johann Wolfgang von Goethe traute den Mathematikern nicht gerade viel zu; er bezweifelte, dass ein solcher aus dem „Hexengewirre seiner Formeln“ heraus zu einer Anschauung der Natur käme. Was der Dichter nicht bedachte, war, dass die mathematischen Formeln Modelle sind, mit denen sich gewisse Teilaspekte der Welt immer wieder ganz hervorragend erfassen lassen und dass die Formelsprache für Klarheit, Unzweideutigkeit, Präzision und eine mühelose weltweite Verständigung sorgt. Auch im Zusammenhang mit Funktionen sind formale Standards geschaffen worden, die überall in gleicher Weise benutzt werden. Und diese sollen nun anhand von zwei Beispielen beleuchtet werden.

Betrachten wir zuerst die Funktion, die jeder reellen Zahl deren Quadratwurzel zuordnet. Dass von dieser Funktion die Rede sein soll, können wir entweder durch Angabe der *Funktionsgleichung*

$$y = \sqrt{x} \qquad \text{oder} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

ausdrücken oder aber durch Angabe der *Zuordnungsvorschrift*:

$$f : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Wird speziell Wert gelegt auf den Definitions- und Wertebereich, so ergänzt man die Notation gerne wie folgt:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Wollen wir nun sagen, dass unter dieser Funktion der Input 16 auf den Output 4 abgebildet wird, so schreiben wir

$$f(16) = 4 \qquad \text{(lies: „}f\text{ von 16 gleich 4“)}$$

oder

$$\text{für } x = 16 \text{ ist } y = 4.$$

Freilich können auch andere Buchstaben verwendet werden. Halten wir zum Beispiel die Wahl des Buchstabens w für besser geeignet, um die Funktion des Quadratwurzelziehens zu bezeichnen, so notieren wir einfach

$$y = \sqrt{x} \qquad \text{oder} \qquad w(x) = \sqrt{x}$$

Im zweiten Beispiel denken wir an die Fallstrecke, die ein Gegenstand im freien Fall nach einer bestimmten Fallzeit zurückgelegt haben wird. Vernachlässigt man den Luftwiderstand - und das tun wir hier nur, um die Formel nicht unnötig zu verkomplizieren - so legt der Gegenstand nach t Sekunden ungefähr die Fallstrecke $s = 5t^2$ in Metern zurück - freilich nur auf der Erde. Wir haben also eine Funktion, die jeder zulässigen Fallzeit die Länge der Fallstrecke zuordnet, und die wir wiederum als Funktionsgleichung

$$s = 5t^2 \qquad \text{oder} \qquad s(t) = 5t^2$$

oder als Zuordnungsvorschrift

$$s : t \mapsto 5t^2$$

notieren. Die Gleichung

$$s(3) = 45 \qquad \text{(lies: „}s\text{ von 3 gleich 45“)}$$

drückt dann aus, dass 45 das Bild von 3 ist, dass 45 das Urbild 3 hat, dass die Funktion an der Stelle 3 den Wert 45 hat, dass unter der Funktion s der Input 3 auf den Output 45 abgebildet wird und - inhaltlich - dass ein frei fallender Gegenstand bei Vernachlässigung der Luftreibung nach 3 Sekunden ungefähr 45 Meter tief gefallen sein wird.

Bevorzugen wir „neutralere“ Buchstaben, so schreiben wir einfach

$$f(x) = 5x^2 \qquad \text{oder} \qquad f : x \mapsto 5x^2,$$

verschenken dabei aber den angenehmen mnemotechnischen Effekt, dass allein schon die Wahl der Buchstaben uns in die richtige Richtung denken lässt, denkt man doch bei t meist an die Zeit (tempus) und bei s an die Strecke.

Eine für uns vorerst noch wenig bedeutungsvolle, aber durchaus fundamentale Verallgemeinerung hat der Funktionsbegriff im 19. Jahrhundert erfahren, als *Weierstrass*, *Dedekind* und andere feststellten, dass Funktionen durchaus nicht immer durch geschlossene Formeln mit endlich vielen Rechenoperationen ausgedrückt werden müssen.