Quadratische Gleichungen

[Grundlagen]

Armin P. Barth

ETH zürich

Unzählige Fragestellungen führen auf Gleichungen. Und unzählige dieser Gleichungen sind nicht-linear. Hier sind einige Beispiele:

$$
\begin{aligned}
5t^2 &= 150 \\
x^6 + \frac{7}{13} &= 0 \\
\frac{n \cdot (n-3)}{2} &= 1224 \\
v + \frac{1}{9}v^2 &= 100 \\
x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= 0 \\
0.2 \cdot 0.96^x &= 0.09
\end{aligned}
$$

und so weiter und so fort.

In seltenen Fällen (wie etwa im zweiten Beispiel) sind solche Gleichungen sehr einfach zu lösen, im Allgemeinen stellen Sie uns aber vor grosse Herausforderungen. Es gibt keine Theorie aller nicht-linearen Gleichungen, die uns verraten würde, wie man alle diese Gleichungen lösen kann. Aber man kann immerhin bei gewissen Typen solcher Gleichungen hilfreiche und interessante Aussagen machen. Der ohne Zweifel häufigste und wichtigste Typ einer nicht-linearen Gleichung in einer Variablen ist die *Polynomgleichung*. Und auf diese wollen wir uns nun konzentrieren.

Polynomgleichungen

Eine Polynomgleichung ist - vereinfacht gesagt - eine Gleichung der Form $Term = 0$, wobei der Term eine Summe von Vielfachen von Potenzen der einzigen Unbekannten x ist. Dies sind Beispiele solcher Gleichungen:

$$
\begin{array}{lr}
\text{(a)} & 7x^4 + 3x^2 - x + 9 = 0 \\
\text{(b)} & \frac{1}{3}x^2 - 14x - 1 = 0 \\
\text{(c)} & -0.1x^3 + 0.4x^2 + 3 = 0 \\
\text{(d)} & x^5 + x^3 + x = 0 \\
\text{(e)} & x^{132} - 60 = 0 \\
\text{(f)} & 16.5x + 2 = 0
\end{array}
$$

Sie sehen sicher sofort, dass obige Beschreibung präzisiert werden muss: Jeder Summand hat die Form $\boxed{?} \cdot x^{\boxed{?}}$, wobei aber als Exponenten nur natürliche Zahlen einschliesslich Null ($x^0 = 1$) vorkommen sollen. Die Faktoren vor den x-Termen heissen *Koeffizienten*, und diese dürfen beliebige reelle Zahlen sein. Wenn es Sie stört, dass wir von Summanden reden, obwohl auch Subtraktionszeichen vorkommen, oder wenn es Sie stört, das gewisse Potenzen von x nicht vorkommen und andere aber doch, so ist es hilfreich, sich die Gleichung in einer Form zu denken, in der erstens ausschliesslich Additionszeichen vorkommen und allfällige Minuszeichen „zum Koeffizienten gerechnet“ werden, und zweitens die fehlenden Potenzen mit Nullen als Koeffizienten aufgefüllt sind. Beispiele (a) und (b) sehen dann so aus:

$$
\begin{array}{lr}
\text{(a)} & 7x^4 + 0 \cdot x^3 + 3x^2 + (-1) \cdot x^1 + 9 \cdot x^0 = 0 \\
\text{(b)} & \frac{1}{3}x^2 + (-14) \cdot x^1 + (-1) \cdot x^0 = 0
\end{array}
$$

Die zweite Gleichung ist also eine Polynomgleichung, in der die Potenzen x^2, x^1, x^0 vorkommen, welche der Reihe nach die Koeffizienten $1/3, -14, -1$ haben. Die erste Gleichung ist eine Polynomgleichung, in der die Potenzen x^4, x^3, x^2, x^1, x^0 vorkommen, welche der Reihe nach die Koeffizienten $7, 0, 3, -1, 9$ haben.

Der höchste vorkommende Exponent der Unbekannten heisst *Grad* der Polynomgleichung. Beispiel (a) zeigt also eine Polynomgleichung 4. Grades, während Beispiel (b) eine Polynomgleichung 2. Grades zeigt.

Um auch die restlichen Beispiele schnell einzuordnen:

> Beispiel (c) hat Grad 3 und der Reihe nach Koeffizienten $-0.1, 0.4, 0, 3$.
>
> Beispiel (d) hat Grad 5 und die Koeffizienten $1, 0, 1, 0, 1, 0$.
>
> Beispiel (e) hat Grad 132 und die Koeffizienten $1, 0, 0, \ldots, 0, -60$, wobei hier 131 Nullen nebeneinander stehen.
>
> Beispiel (f) hat Grad 1 und die Koeffizienten 16.5 und 2.

Sehen Sie den Punkt? Polynomgleichungen vom Grad 1 sind einfach nur lineare Gleichungen (in einer Unbekannten), bei denen Sie sich schon sehr gut auskennen. Wir haben also einfach nur das Konzept der linearen Gleichung erweitert, indem wir der Gleichung nun gestatten, weitere und damit höhere Potenzen der Unbekannten zu enthalten. Dadurch hören die Gleichungen auf, linear zu sein, sobald sie einen Grad haben, der 2 oder höher ist.

Stark vereinfachend könnte man sagen, dass eine Polynomgleichung desto herausfordernder ist, je höher ihr Grad ist. Polynomgleichungen vom Grad 1 (also lineare Gleichungen) beherrschen wir nun im Schlaf, aber schon die Polynomgleichung vom Grad 2 (die im Zentrum dieses Textes stehen wird) stellt eine kleine Herausforderung dar. Und soll man Polynomgleichungen vom Grad 3, 4, 5, … lösen, so steht man vor grossen Schwierigkeiten. Das ist nicht grundsätzlich wahr; zum Beispiel haben Sie Polynomgleichungen von höherem Grad erlebt, die extrem einfach zu lösen sind, und es ist auch nicht so, dass die Schwierigkeit mit dem Grad linear zunimmt. Aber es trifft schon zu, dass man ab Grad 3 sehr viel mehr arbeiten muss, um wirklich zu verstehen, wie den Gleichungen noch Lösungen entlockt werden können. Seien Sie gespannt…

Merken Sie sich bitte alle Details der folgenden Definition gut:

Definition:
Eine Gleichung der Art $\boldsymbol{a \cdot x + b = 0}$ *(mit* $\boldsymbol{a, b \in \mathbb{R}}$ *und* $\boldsymbol{a \neq 0}$*) heisst* ***Polynomgleichung 1. Grades*** *oder* ***lineare Gleichung****.*

Eine Gleichung der Art $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ *(mit* $\boldsymbol{a, b, c \in \mathbb{R}}$ *und* $\boldsymbol{a \neq 0}$*) heisst* ***Polynomgleichung 2. Grades*** *oder* ***quadratische Gleichung****.*

Eine Gleichung der Art $\boldsymbol{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0}$ *(mit* $\boldsymbol{a, b, c, d \in \mathbb{R}}$ *und* $\boldsymbol{a \neq 0}$*) heisst* ***Polynomgleichung 3. Grades*** *oder* ***kubische Gleichung****.*

Die Gleichung $\boldsymbol{a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e = 0}$ *(mit* $\boldsymbol{a, b, c, d, e \in \mathbb{R}}$ *und* $\boldsymbol{a \neq 0}$*) heisst* ***Polynomgleichung 4. Grades****.*

Allgemein:
Eine Gleichung der Art

$$\boldsymbol{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots}$$
$$\boldsymbol{+ a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$$

mit ***Koeffizienten*** $\boldsymbol{a_n, \ldots, a_0} \in \mathbb{R}$ *und* $\boldsymbol{a_n \neq 0}$ *heisst* ***Polynomgleichung n-ten Grades***.

Warum legen wir so grossen Wert drauf, Polynomgleichungen zu untersuchen? Weil sie in der Praxis überaus häufig sind. Und weil sie interessant sind; die Geschichte ihrer Lösungsmethoden liest sich wie ein spannender Roman voller persönlicher Schicksale. Bereits die quadratische Gleichung, um die es im Folgenden ja ausschliesslich gehen wird, ist spannend.

Polynomgleichungen sind in der Mathematik und ihren Abnehmerwissenschaften überaus häufig. Es wäre darum zu begrüssen, wenn wir Verfahren hätten, sie sicher und mühelos zu lösen. Leider ist das nicht so einfach. Während uns Polynomgleichungen ersten Grades (also lineare Gleichungen) keine Mühe mehr bereiten, stellen bereits die Polynomgleichungen zweiten Grades (also quadratische Gleichungen) eine gewisse Herausforderung dar - von Gleichungen höheren Grades gar nicht zu reden. Immerhin können wir gewisse quadratische Gleichungen bereits jetzt lösen, ohne dass neues Wissen nötig wäre. Und damit wollen wir hier anfangen. Wir fragen also: In welchen Fällen reicht welches schon früher erworbene Wissen aus, um eine solche Gleichung zu lösen?

Normalform und Koeffizienten

Wir erinnern uns: Eine Polynomgleichung zweiten Grades kann stets in diese Normalform gebracht werden:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.$$

Dabei sind die *Koeffizienten* a, b und c beliebige reelle Zahlen; und natürlich soll $a \neq 0$ sein, denn sonst hätte die Gleichung gar nicht Grad 2, sondern höchstens Grad 1. Es ist wichtig, immer die Koeffizienten korrekt bestimmen zu können, und darum betrachten wir zunächst ein paar Beispiele:

> Die Gleichung $3x^2 + 6x - 1 = 0$ hat offenbar die obige Form. Die Koeffizienten lauten der Reihe nach: $a = 3, b = 6, c = -1$. Beachten Sie, dass das Vorzeichen mit zum Koeffizienten gehört.
>
> Die Gleichung $1/5 \cdot x^2 - 18x = 0$ hat ebenfalls obige Form. Diesmal lauten die Koeffizienten: $a = 1/5, b = -18$ und $c = 0$. Während der vorderste Koeffizient zwingend von Null verschieden ist, kann jeder der beiden anderen Koeffizienten natürlich Null werden.
>
> Die Gleichung $\pi \cdot x^2 = 0$ ist ebenfalls quadratisch mit den Koeffizienten $a = \pi$ und $b = c = 0$.
>
> Oftmals wird eine quadratische Gleichung nicht von Anfang an in der erwähnten Normalform vorliegen. Vielmehr müssen die einzelnen Glieder zuerst umgestellt werden, will man die Normalform erreichen. Die Gleichung $6.2 - 7.3x = 2.5x^2$ ist ein solches Beispiel. Wir können die Koeffizienten dann nicht einfach von links nach rechts herauslesen, sondern müssen zuerst umstellen: $2.5x^2 + 7.3x - 6.2 = 0$. Die Koeffizienten lauten folglich: $a = 2.5, b = 7.3$ und $c = -6.2$.
>
> Oftmals sind noch aufwändigere Umstellungen nötig. Zum Beispiel hier:
>
> $$\frac{x}{3} - \frac{x+2}{6} = x^2 + \frac{1}{6}.$$

Multiplikation mit 6 und anschliessende Vereinfachungen führen auf $6x^2 - x + 3 = 0$ mit den Koeffizienten $6, -1$ und 3.

Spezialfälle

Es zeigt sich, dass eine quadratische Gleichung ganz einfach gelöst werden kann, sobald wenigstens einer der beiden Koeffizienten b und c verschwindet (also gleich Null ist). Wir betrachten alle drei Fälle einzeln:

Fall 1: $b = c = 0$

In diesem Fall reduziert sich die Gleichung zu

$$a \cdot x^2 = 0.$$

Das Produkt $a \cdot x^2$ muss Null ergeben. Und da a nicht Null sein darf, kann das einzig für $x = 0$ erfüllt werden. In diesem Fall lautet die Lösungsmenge also immer

$$L = \{0\}.$$

Fall 2: $b = 0$ und $c \neq 0$

In diesem Fall reduziert sich die Gleichung zu

$$a \cdot x^2 + c = 0.$$

Da $a \neq 0$ ist, können wir so umformen:

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Nun ist die Zahl auf der rechten Seite entweder positiv oder negativ. Im zweiten Fall ist die Aussageform nicht erfüllbar, im ersten hingegen schon. Wir finden also:

$$L = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, \qquad \frac{-c}{a} > 0.$$

Betrachten Sie unbedingt, dass die Zahl $-c/a$ nicht negativ zu sein braucht, nur weil der Term ein Minuszeichen enthält. Wir sind ja bei der Wahl von a und c (fast) völlig frei, und da eine dieser Zahlen selber negativ sein könnte, können wir nichts Allgemeines darüber aussagen, ob der fragliche Term nun negativ oder positiv ist. Das können wir erst dann, wenn konkrete Zahlen vorliegen. So führt zum Beispiel die Gleichung $2x^2 - 3 = 0$ auf

$$x^2 = \frac{3}{2},$$

also

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}},$$

während aber die Gleichung $2x^2 + 3 = 0$ auf

$$x^2 = -\frac{3}{2},$$

also

$$L = \{\}$$

führt.

Fall 3: $c = 0$ und $b \neq 0$

In diesem Fall reduziert sich die Gleichung zu

$$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0.$$

Wir können x ausklammern:

$$x \cdot (a \cdot x + b) = 0.$$

Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten, wie das Produkt auf der linken Seiten Null werden kann: Es kann daran liegen, dass $x = 0$ ist oder aber daran, dass $a \cdot x + b = 0$ ist. Im ersten Fall haben wir eine Lösung gefunden. Im zweiten können wir, da $a \neq 0$ ist, umformen zu $x = -b/a$. Insgesamt hat die Gleichung also zwei Lösungen, nämlich:

$$L = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}.$$

Wir sehen deutlich, dass uns die quadratische Gleichung in keinem dieser drei Fälle Mühe bereitet. Fragt sich nur, was los ist, wenn alle drei Koeffizienten ungleich Null sind.

In Linearfaktoren aufspalten

Wie sollen wir zum Beispiel die quadratische Gleichung $x^2+4x-21=0$ lösen? Offenbar gibt es keinen ganz elementaren Weg, die Gleichung so umzustellen, dass die Variable isoliert werden kann. Das liegt daran, dass die Variable an zwei Stellen vorkommt, einmal linear und einmal zur zweiten Potenz. Wenn es uns aber gelingt, den Term auf der linken Seite als ein Produkt zweier Linearfaktoren zu schreiben, dann sind wir gerettet:

$$x^2+4x-21=(\qquad)\cdot(\qquad).$$

Das ist (wenigstens in diesem Beispiel) sehr einfach: Jeder Linearfaktor muss wohl vorne ein x enthalten. Und da $21=3\cdot 7$ und gleichzeitig $7-3=4$ ist, finden wir die fehlenden Einträge leicht:

$$x^2+4x-21=(x+7)\cdot(x-3).$$

Nun muss also

$$(x+7)\cdot(x-3)=0$$

sein. Ein Produkt von reellen Zahlen ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist. Die Gleichung wird also zu einer wahren Aussagen, wenn wir x entweder durch die Zahl -7 oder aber durch die Zahl 3 belegen. Somit ist

$$L=\{-7,3\}.$$

Warum waren wir hier erfolgreich? Weil es uns leicht gelungen ist, den quadratischen Term in Linearfaktoren aufzuspalten. Es stellen sich sofort ein paar interessante Fragen: Gelingt das immer so einfach? Ist es grundsätzlich immer möglich, eine quadratische Gleichung auf diese Weise zu lösen? Die Antworten auf diese Fragen sind negativ, sorgen darum aber für willkommene neue Herausforderungen.

Wir wissen zum Beispiel, dass es quadratische Gleichungen mit leerer Lösungsmenge gibt. $x^2+1=0$ ist eine solche; es ist ja offenbar unmöglich, dass ein Quadrat (welches immer nicht-negativ ist) zu 1 addiert Null liefert. Wenn die Gleichung also keine Lösung besitzt, wird es uns auch nicht gelingen, den quadratischen Term in oben beschriebener Weise in Linearfaktoren zu zerlegen.

Dazu kommt noch, dass es selbst dann, wenn eine Faktorisierung in Linearfaktoren grundsätzlich möglich ist, unter Umständen schwierig ist, die Klammereinträge zu finden. Versuchen Sie nur einmal, den Term $x^2+1.35x-5.92$ in Linearfaktoren aufzuspalten…

Wir sehen deutlich, dass wir eine neue Idee benötigen, wenn wir unser Ziel, jede beliebige quadratische Gleichung zu lösen, erreichen wollen.

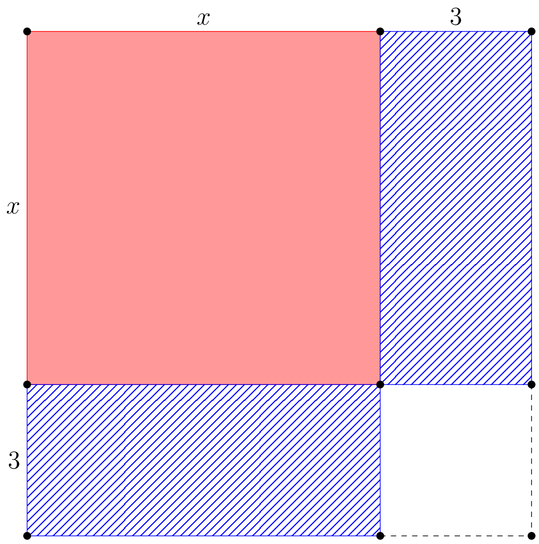
Wie können wir also eine quadratische Gleichung lösen, wenn eine Zerlegung in Linearfaktoren grundsätzlich möglich, aber schwer zu finden ist? Und wie lässt sich entscheiden, ob eine solche Gleichung überhaupt Lösungen besitzt oder nicht?

Eine schöne Idee

Betrachten wir dazu als Beispiel die Gleichung

$$x^2+6x=40.$$

Hier ist eine wirklich schöne Idee, die auf den arabischen Mathematiker Abu Dscha'far Muhammed ibn Musa al-Chwarizmi zurückgeht.



Wir fassen den Summanden x^2 als geometrisches Quadrat auf, was freilich nur für positive x-Werte möglich ist. Wir fassen ferner den Summanden $6x$ als das Doppelte eines Rechtecks mit den Seitenlängen x und 3 auf. Wenn wir die Rechtecke dem Quadrat wie in der Abbildung anlagern, fehlt offenbar ein weiteres (kleines) Quadrat, um ein grosses Quadrat zu vervollständigen, genauer: Wenn wir 3^2 ergänzen, so füllen wir damit gerade das Quadrat auf, welches die Seitenlänge $x + 3$ hat.

Wenn wir diese Idee auf die Gleichung übertragen, bedeutet das: Wir können beidseitig 3^2 addieren und erhalten dann auf der linken Seite gerade das Quadrat von $x + 3$:

$$\begin{aligned} & & x^2 + 6x &= 40 \\ &\Leftrightarrow & x^2 + 6x + 3^2 &= 40 + 3^2 \\ &\Leftrightarrow & (x+3)^2 &= 49. \end{aligned}$$

Nun hat sich die Situation erheblich zu unseren Gunsten verbessert. Die Variable kommt nur noch an einer einzigen Stelle vor, und es muss möglich sein, die Gleichung nach ihr aufzulösen:

$$\begin{aligned} & & x^2 + 6x &= 40 \\ &\Leftrightarrow & (x+3)^2 &= 49 \\ &\Leftrightarrow & x + 3 &= \pm 7 \\ &\Leftrightarrow & x &= -3 \pm 7. \end{aligned}$$

Dabei ist wichtig, Folgendes zu beachten: Die Gleichung $u^2 = 49$ hat zwei Lösungen, nämlich $u_1 = 7$ und $u_2 = -7$ oder anders notiert: $u = \pm 7$. Eine korrekte (und äquivalente) Umformung von $u^2 = 49$ muss also $u = \pm 7$ lauten und nicht etwa nur $u = 7$. Das erklärt, warum in der dritten Zeile „$\pm$" auftaucht.

Unsere originale quadratische Gleichung $x^2 + 6x = 40$ besitzt somit zwei Lösungen, nämlich $x_1 = -10$ und $x_2 = 4$. Eine quadratische Gleichung kann also genau zwei Lösungen haben, eine Situation, die bei den linearen Gleichungen nicht möglich gewesen war.

Quadratisches Ergänzen

Die Idee zu dieser Lösungsmethode stammt aus der Geometrie, aber natürlich funktioniert sie auch, wenn wir uns x nicht als eine Strecke denken. Insbesondere funktioniert sie auch dann, wenn die Gleichung mindestens eine negative Lösung hat. Betrachten wir dazu ein weiteres Beispiel:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0.$$

Subtraktion von $1/2$ liefert:

$$x^2 + \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}.$$

Nun versuchen wir, die linke Seite in ein Quadrat der Art $(x \qquad)^2$ umzuformen, indem wir einen passenden Term additiv ergänzen. Als Vorlage dient uns dabei die binomische Formel

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x \cdot y + y^2 = (x+y)^2 \\ & x^2 + \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

Wenn also $3/2 \cdot x$ dem Term $2x \cdot y$ entsprechen soll, dann muss y zwingend die Hälfte von $3/2$ sein. Damit ist klar, dass wir beidseits der originalen Gleichung die Zahl $(3/4)^2$ addieren müssen, um auf der linken Seite insgesamt ein Quadrat zu erhalten:

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Erneut sind wir in der überaus vorteilhaften Situation angekommen, in der die Unbekannte nur noch an einer einzigen Stelle vorkommt und folglich durch wenige weitere Schritte isoliert werden kann:

$$\begin{aligned} & \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{16} = \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \quad & x + \frac{3}{4} = \pm\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & x = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge unserer Gleichung ist also

$$L = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Einmal mehr hat die *Methode des quadratischen Ergänzens* zum Ziel geführt.

Eine allgemeine Lösungsformel

Nun wäre es alles andere als effizient, würden wir stets jede vorkommende quadratische Gleichung mit dieser Methode lösen. Das wäre etwa so, als würden wir jedes Mal, wenn wir die Haustür aufschliessen wollen, eigens einen passenden Schlüssel dafür herstellen, um ihn gleich nachher wegzuschmeissen. Viel besser ist es natürlich, den Schlüssel nur einmal herzustellen, zu behalten und das Problem damit ein für alle Mal zu lösen.

In diesem Sinne wenden wir das quadratische Ergänzen nun nur noch ein einziges Mal an und zwar, um die *allgemeine quadratische Gleichung* (und damit jede quadratische Gleichung) zu lösen.

Sei also $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit irgendwelchen reellen Koeffizienten a, b und c und $a \neq 0$. Da der vorderste Koeffizient von Null verschieden ist, können wir die Gleichung durch ihn dividieren und erhalten:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0.$$

Übrigens können wir immer $a > 0$ annehmen, denn falls a negativ ist, multiplizieren wir die ganze Gleichung einfach mit dem Faktor (-1), ohne dabei die Lösungsmenge zu verändern. Subtraktion c/a von führt nun auf:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a}.$$

Nun kommt der entscheidende Schritt, das quadratische Ergänzen. Erneut ist uns eine binomische Formel Vorlage:

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x \cdot y + y^2 = (x+y)^2 \\ & x^2 + \frac{b}{a} \cdot x. \end{aligned}$$

Wenn die Summanden $2x \cdot y$ und $b/a \cdot x$ einander entsprechen müssen, dann muss y zwingend die Hälfte von b/a sein. Also addieren wir bei der originalen Gleichung beidseitig den Term $(b/(2a))^2$, um auf der linken Seite insgesamt ein Quadrat herzustellen:

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 . \end{aligned}$$

Bedenken Sie, dass diese Umformung wirklich für jede Polynomgleichung 2. Grades korrekt ist, ganz ohne Einschränkung. Jetzt können wir in wenigen weiteren Umformschritten nach der Unbekannten x auflösen:

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \Leftrightarrow \quad & x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \Leftrightarrow \quad & x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \end{aligned}$$

Im letzten Umformschritt haben wir benutzt, dass a positiv ist, so dass also tatsächlich $\sqrt{4a^2} = 2a$ gilt. Ein Zusammenfassen von Termen führt jetzt auf die einfachste Form:

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow \quad & x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \end{aligned}$$

Wir finden also, dass die allgemeine quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ sich durch die folgenden Formel lösen lässt:

Auflösungsformel für quadratische Gleichungen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$

beziehungsweise

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}.$$

Diskriminante und Anzahl (reeller) Lösungen

Unsere frisch hergeleitete Formel könnte vermuten lassen, dass eine quadratische Gleichung stets genau zwei Lösungen hat. Trifft das zu? Betrachten wir dazu drei Beispiele:

$x^2 - 4x - 5 = 0$:
Hier ist $a = 1, b = -4, c = -5$. Einsetzen in die Auflösungsformel führt auf

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 6}{2} . \end{aligned}$$

Die Gleichung hat also in der Tat zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 5$ und $x_2 = -1$, was wir freilich auch leicht durch Faktorisieren hätten finden können.

$4x^2 - 28x + 49 = 0$:
Hier ist $a = 4, b = -28, c = 49$. Einsetzen in die Auflösungsformel führt auf

$$\begin{aligned} x &= \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 4 \cdot 49}}{8} \\ &= \frac{28 \pm \sqrt{0}}{8} \\ &= \frac{28 \pm 0}{8}. \end{aligned}$$

Die Gleichung besitzt also bloss eine Lösung, nämlich $x = 7/2$. Man nennt sie allerdings eine reelle Doppellösung, weil eine Faktorisierung der Gleichung auf zwei identische Linearfaktoren führen würde:

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 28x + 49 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (2x-7) \cdot (2x-7) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (2x-7)^2 = 0. \end{aligned}$$

$x^2 + x + 7 = 0$:
Hier ist $a = 1, b = 1, c = 7$. Einsetzen in die Auflösungsformel führt auf

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-27}}{2}. \end{aligned}$$

Hier stossen wir auf ein Problem: Die Wurzel lässt sich in reellen Zahlen nicht ziehen. Die Gleichung besitzt offenbar gar keine reelle Lösung. Anders gesagt: Die Aussageform $x^2 + x + 7 = 0$ ist in den reellen Zahlen nicht erfüllbar; es gibt keine reelle Zahl, die - für x eingesetzt - eine wahre Aussage entstehen lässt.

Wir sehen deutlich, dass der Term unter der Wurzel, $b^2 - 4a \cdot c$, darüber entscheidet, wie viele Lösungen die quadratische Gleichung hat. Ist er positiv, so können wir die Wurzel ziehen und erhalten zwei verschiedene reelle Lösungen. Ist er gleich Null, so hat auch die Wurzel den Wert 0, und es entsteht eine reelle Doppellösung. Ist er aber negativ, so gibt es gar keine reelle Lösung. Weil dieser Term so wichtig ist, hat er einen eigenen Namen erhalten: Er heisst *Diskriminante* (lat.: discriminare = unterscheiden). Er unterscheidet also, welche Situation bezüglich der Anzahl Lösungen jeweils vorliegt.

Definition:
Bei einer quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, (a \neq 0)$ wird der Term

$$D := b^2 - 4a \cdot c$$

Diskriminante *genannt. Es gilt zudem:*

$D > 0$: Die Gleichung besitzt zwei reelle Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \end{aligned}$$

$D = 0$: Die Gleichung besitzt eine reelle Doppellösung

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

$D < 0$: Die Gleichung besitzt keine reelle Lösung.

Damit haben wir die quadratische Gleichung endgültig und auf befriedigende Weise gelöst. Jede solche Gleichung, die uns irgendwann und irgendwo begegnen wird, können wir sofort dahingehend untersuchen, wie viele reelle Lösungen sie hat, und dank der Formel können wir die Lösungen auch mit Leichtigkeit berechnen. Wir sind nun also in der Lage, jede Polynomgleichung ersten und zweiten Grades mühelos zu lösen. Das ist eigentlich ein Glücksfall: Selten in der Mathematik kann man eine so vollständige und befriedigende Übersicht über alle möglichen Fälle einer ganzen Klasse von Gleichungen gewinnen. Man mag das bedauern; andererseits kann man aber andere Gleichungen auch als interessante Herausforderungen sehen.

Die umgekehrte Frage

Bisher sind wir immer von quadratischen Gleichungen ausgegangen und haben nach ihren Lösungen gesucht. Umgekehrt kann man natürlich auch fragen, wie viele und welche Gleichungen wohl ein vorgegebenes Set von Lösungen erfüllen. Betrachten wir sofort ein Beispiel: Wir erfahren, dass jemand eine quadratische Gleichung gelöst und die beiden Lösungen $x_1 = -4$ und $x_2 = 1/3$ erhalten hat. Können wir daraus die Gleichung eindeutig rekonstruieren?

Nun, es fällt uns sicher leicht, eine konkrete quadratische Gleichung zu nennen, die die vorgegebenen Lösungen besitzt. Dazu müssen wir nur an Linearfaktoren denken:

$$\begin{aligned} & (x+4)\cdot(x-\frac{1}{3}) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{4}{3} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt offenbar die verlangten Lösungen, denn wenn man für x die Zahl -4 einsetzt, wird der erste Faktor (und somit die ganze linke Seite) 0, und wenn man für x die Zahl $\frac{1}{3}$ einsetzt, wird der zweite Faktor (und somit die ganze linke Seite) 0. Ist das die einzige quadratische Gleichung, die das vorgegebene Set an Lösungen besitzt?

Nein. Wir können obige Gleichung mit jeder reellen Zahl ungleich 0 multiplizieren und erhalten eine neue Gleichung, ohne dass sich freilich die Lösungsmenge verändert. Also zum Beispiel:

Multiplikation mit 3 liefert

$$3x^2 + 11x - 4 = 0.$$

Multiplikation mit -6 liefert

$$-6x^2 - 22x + 8 = 0.$$

und so weiter. Wenn wir uns eine quadratische Gleichung repräsentiert denken durch das 3-Tupel (a, b, c) ihrer Koeffizienten, so gibt es also unendlich viele Gleichungen zu einem vorgegebenen Set von Lösungen. Freilich sind sie alle äquivalent. Wenn wir allerdings fordern, dass $a = 1$ sein soll, dann gibt es bloss eine einzige Gleichung, in unserem Beispiel eben die Gleichung

$$x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{4}{3} = 0.$$

Der Satz von Vieta

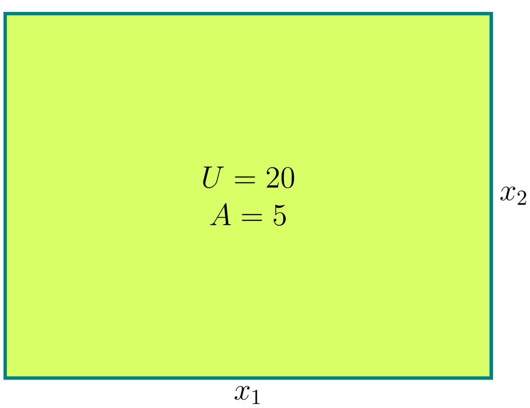
Der französische Mathematiker François Viète hat diese Frage in seinem Buch „De aequationum recognitione et emendatione Tractatus duo“ allgemein behandelt. Angenommen, zwei (nicht zwingend unterschiedliche) reelle Zahlen x_1 und x_2 seien vorgegeben. Wie kann dann leicht eine quadratische Gleichung gefunden werden, die genau die verlangten Lösungen besitzt? Offenbar kann eine solche Gleichung gefunden werden, indem man die Linearfaktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ miteinander multipliziert und das Produkt gleich 0 setzt:

$$\begin{aligned} & (x-x_1)\cdot(x-x_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \underbrace{-(x_1+x_2)}_{\text{b}} \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Ausmultiplizieren wird der Zusammenhang zwischen den Lösungen und den Koeffizienten überdeutlich: Sind die beiden Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, so kann man leicht eine quadratische Gleichung mit erstem Koeffizienten 1 und den verlangten Lösungen angeben, indem man für b die negative Summe und für c das Produkt der beiden Lösungen wählt. Dies ist der Satz von Vieta:

> **Satz:** (Satz von Vieta)
> *Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, so besitzt die quadratische Gleichung mit den Koeffizienten*
>
> $$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -(x_1 + x_2) \\ c &= x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$
>
> *gerade die verlangten Lösungen.*

Betrachten wir ein Problem aus dem antiken Babylonien: Ein Rechteck ist gesucht, welches den Umfang 20 und den Flächeninhalt 5 besitzt.



Wir wissen also, dass $x_1 + x_2 = 10$ und dass $x_1 \cdot x_2 = 5$ ist. Nach dem Satz von Vieta folgt, dass die gesuchten Zahlen die Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 10x + 5 = 0$$

sein müssen. Indem wir also diese Gleichung lösen, finden wir die gesuchten Seitenlängen:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 20}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}.$$

Betrachten wir noch ein zweites Beispiel: Jemand versichert uns, dass die Gleichung

$$x^2 - 20x + 51 = 0$$

ganzzahlige Lösungen besitzt. Können wir sie ganz leicht finden? Ja, in der Tat: Vieta sagt uns, dass 51 das Produkt und 20 die Summe der beiden Lösungen ist, und da $51 = 3 \cdot 17$ ist, kommen als Lösungen nur die Zahlen 3 und 17 in Frage. Und tatsächlich ist

$$x^2 - 20x + 51 = (x - 3) \cdot (x - 17).$$

Zum Schluss soll noch ergänzt werden, dass es den Satz von Vieta auch für Polynomgleichungen höheren Grades gibt. Die Idee ist ja leicht verallgemeinerbar. Soll etwa eine Polynomgleichung 3. Grades gefunden werden, welche genau die vorgegebenen Lösungen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ besitzt, so können wir eine solche Gleichung sofort angeben:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0.$$

Durch Ausmultiplizieren findet man dann:

$$\begin{aligned} x^3 & \overbrace{-(x_1 + x_2 + x_3)}^{\text{b}} x^2 \\ & + \underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{\text{c}} x \underbrace{-x_1x_2x_3}_{\text{d}} = 0. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten:

Satz: (Satz von Vieta für Grad 3)
Sind $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, so besitzt die kubische Gleichung mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -(x_1 + x_2 + x_3) \\ c &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \\ d &= -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned}$$

gerade die verlangten Lösungen.

Und in analoger Weise lässt sich eine solche Aussage für alle Polynomgleichungen höheren Grades machen.

Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen

In der Praxis liegen Gleichungen oftmals nicht in einer „Normalform“ vor. Vielmehr kommen sie in einer Form daher, die ihren Entstehungsprozess abbildet: Irgendein konkretes Problem wird formalisiert, und so entsteht dann eine Gleichung. Und manchmal kann es sein, dass eine solche Gleichung sich nach entsprechender Umformung als Polynomgleichung 2. Grades entpuppt und folglich mit den in dieser Sequenz erarbeiteten Methoden erfolgreich bearbeitet werden kann. Wir wollen hier drei verschiedene Typen von häufig vorkommenden Gleichungen untersuchen, die - nach entsprechender Bearbeitung - zu Polynomgleichungen 2. Grades werden.

Bruchgleichungen

Betrachten wir etwa die Gleichung

$$\frac{x}{x-3} + \frac{2}{2x-6} = \frac{2}{x^2-9}.$$

Durchaus nicht alle Bruchgleichungen lassen sich in quadratische Gleichungen umformen, aber bei dieser hier wird es gelingen, auch wenn das vielleicht nicht auf den ersten Blick ersichtlich ist. Unabhängig davon, ob wir das nun ahnen oder nicht, werden wir diese Gleichung sicherlich so anpacken müssen, dass wir sie mit dem Hauptnenner multiplizieren. Was ist der Hauptnenner? Nun, wegen

$$2x - 6 = 2(x-3)$$

und

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

lautet der Hauptnenner so: $2(x+3)(x-3)$. Gleichzeitig müssen wir festhalten, dass gewisse Werte für x gar nicht in Frage kommen, weil sonst 0 in einem Nenner entsteht. Keinesfalls dürfen wir für x eine der Zahlen 3 oder -3 einsetzen. Sollte der Auflösungsprozess also auf eine dieser Zahlen führen, so müssten wir sie als Scheinlösung verwerfen. Als Lösungen in Frage kommen nur Zahlen aus der Menge $\mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner und anschliessendes Vereinfachen führt auf:

$$\begin{aligned} & 2x(x+3) + 2(x+3) = 2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^2 + 6x + 2x + 6 = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^2 + 8x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + 4x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Es ist also tatsächlich eine quadratische Gleichung entstanden, und deren Lösung bereitet uns nun keinerlei Mühe mehr. Wir erhalten:

$$L = \left\{-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\right\}.$$

Merken wir uns, dass Bruchgleichungen gelegentlich auf quadratische Gleichungen führen, und wenn man so viel Glück hat, dann gelingt die Auflösung leicht mit den in dieser Sequenz behandelten Methoden.

Biquadratische Gleichungen

Betrachten wir die Gleichung

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Man könnte versucht sein, vorschnell das Handtuch zu werfen, denn das ist eine Polynomgleichung 4. Grades, und bei einer solchen erwartet man vielleicht ganz schwerwiegende Probleme. Ein zweiter Blick verrät aber, dass eine ganz spezielle Situation vorliegt: Der Grad 4 lässt sich zwar nicht wegdiskutieren, aber es fällt auf, dass abgesehen von der Konstanten bloss ein Term mit x^2 und einer mit x^4 vorkommen; insbesondere fehlen also die Summanden mit ungerader Potenz von x. Kann man das nicht irgendwie ausnutzen?

Man kann. Und zwar so: Wir führen vorübergehend eine neue Variable, zum Beispiel z, ein, die für x^2 stehen soll:

$$\text{Substitution } z := x^2.$$

Ersetzt man in der Gleichung nun x^2 durch z und folglich x^4 durch z^2, so wird der Erfolg dieses Schrittes sofort deutlich:

$$z^2 - 13z + 36 = 0.$$

Es entsteht sofort eine gewöhnliche quadratische Gleichung, die wir leicht nach z auflösen können:

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}.$$

Somit ist $z \in \{4, 9\}$. Nun erinnern wir uns daran, dass z für x^2 eingeführt worden ist. Es ist also $x^2 \in \{4, 9\}$. Und daraus finden wir schliesslich vier Lösungen für die Variable x, nämlich $L_x = \{-2, 2, -3, 3\}$.

Wäre eine der Lösungen für z negativ und die andere positiv gewesen, hätten wir aus der negativen keine Lösungen für x ableiten können, da ein Quadrat ja nicht negativ sein kann; es hätte dann insgesamt nur zwei Lösungen für x gegeben. Wären sogar beide z-Werte negativ gewesen, hätten wir insgesamt keine einzige Lösung für x gefunden.

Gleichungen dieser Art heissen *biquadratisch* (doppelt quadratisch). Wenn immer eine Polynomgleichung 4. Grades in der speziellen Form $a \cdot x^4 + c \cdot x^2 + e = 0$ (also ohne die ungeraden Potenzen der Unbekannten) vorliegt, dann führt der Substitutionsschritt

$$z := x^2$$

sofort auf eine quadratische Gleichung, die folglich leicht gelöst werden kann.

Merken wir uns:

Definition:
Polynomgleichungen der Form

$$a \cdot x^4 + c \cdot x^2 + e = 0$$

heissen ***biquadratische Gleichungen.*** *Der Substitutionsschritt $z := x^2$ führt sofort auf eine quadratische Gleichung, die dann nach z aufgelöst werden kann.*

Wurzelgleichungen

Betrachten wir die Gleichung

$$\sqrt{x - 15} + \sqrt{x} = \sqrt{x + 9}.$$

Offenbar handelt es sich hierbei um eine Wurzelgleichung, und es ist nicht sofort klar, ob ein Zusammenhang zu quadratischen Gleichungen existiert und worin dieser allenfalls besteht. Aber unabhängig davon, ob ein solcher Zusammenhang nun existiert oder nicht, scheint die einzige Chance, die Gleichung zu lösen, darin zu liegen, dass wir beide Seiten der Gleichung quadrieren:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-15}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9} \\ \Rightarrow \quad & \left(\sqrt{x-15}+\sqrt{x}\right)^2=x+9 \\ \Leftrightarrow \quad & x-15+2\sqrt{x-15}\cdot\sqrt{x}+x=x+9 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{x-15}\cdot\sqrt{x}=24-x. \end{aligned}$$

Die lästigen Wurzeln sind zwar noch immer nicht verschwunden, gleichwohl sieht die Gleichung nun einfacher aus. Wie können wir die verbliebenen Wurzeln eliminieren? Nun, ganz einfach, durch erneutes Quadrieren beider Seiten:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{x-15}\cdot\sqrt{x}=24-x \\ \Rightarrow \quad & 4(x-15)\cdot x=576-48x+x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x^2-60x=576-48x+x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x^2-12x-576=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2-4x-192=0. \end{aligned}$$

Erneut konnten wir das Problem auf eine simple quadratische Gleichung reduzieren. Wenn man diese auflöst, so erhält man $x_1 = 16$ und $x_2 = -12$.

Hier ist aber Vorsicht geboten. Da wir zweimal quadriert haben, könnte es sein, dass Scheinlösungen entstanden sind, also Zahlen, die zwar die Aussageform $x^2-4x-192=0$ erfüllen, aber nicht die ursprüngliche Aussageform. Ein Test in der Ursprungsgleichung zeigt schnell, dass $x=-12$ nicht funktionieren kann, da sonst die Wurzel einer negativen Zahl entsteht. Die Zahl $x = 16$ allerdings klappt. Wenn man sie in die Ursprungsgleichung einsetzt, entsteht eine wahre Aussage:

$$\begin{aligned} & \sqrt{16-15}+\sqrt{16}=\sqrt{16+9} \\ \Leftrightarrow \quad & 1+4=5. \end{aligned}$$

Wir merken uns also, dass das Umformen von Wurzelgleichungen gelegentlich auf quadratische Gleichungen führen kann, dass durch den Umformprozess aber Scheinlösungen entstehen können, die nur durch konsequentes Testen in der Ursprungsgleichung entlarvt werden können.