Quadratwurzeln

[Grundlagen]

Armin P. Barth

Quadratwurzeln spielen eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik. Darum versuchen wir, in diesem kurzen Text alles Wesentliche dazu zusammenzustellen.

Wie definiert man die Quadratwurzel?

Zunächst einmal wollen wir uns der Definition der Quadratwurzel zuwenden. Sucht man die Quadratwurzel (oder einfach die Wurzel) einer Zahl a, so sucht man eigentlich eine neue Zahl x mit einer ganz spezifischen Eigenschaft: Setzt man x ins Quadrat, so soll man wieder die Ausgangszahl a erhalten. Dabei sind folgende Einschränkungen wichtig: Die Ausgangszahl a darf nicht negativ sein. Denn wir können in $\mathbb{R}$ keine Zahl finden, deren Quadrat ein negatives Ergebnis liefert. Weiter soll die gesuchte Zahl auch nicht negativ sein. Wir vereinbaren, dass die Quadratwurzel *eindeutig* ist, also nur diejenige nicht-negative Zahl x meint, deren Quadrat gleich a ist. Kurz und bündig:

Definition:
Sei $a \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

*Die **Quadratwurzel** oder einfach **Wurzel** von a, in Zeichen: $\sqrt{a}$ (selten $\sqrt[2]{a}$), ist diejenige nicht-negative reelle Zahl x, für die $x^2 = a$ gilt.*

*Die Zahl oder der Term unter der Wurzel heisst **Radikand**.*

Es ist also zum Beispiel

$$\sqrt{16} = 4$$
$$\sqrt{169} = 13$$
$$\sqrt{1} = 1$$
$$\sqrt{1.44} = 1.2$$
$$\sqrt{3^{100}} = 3^{50}$$

und so weiter. Dabei ist sehr wichtig, dass wir uns gut merken, dass etwa -4 nicht in Frage kommt, wenn wir $\sqrt{16}$ bilden wollen. Überhaupt muss man sehr gut unterscheiden zwischen der Aufgabe, die Wurzel der nicht-negativen Zahl a zu ziehen und der Aufgabe, die Gleichung $x^2 = a$ zu lösen:

Soll etwa 49 gebildet werden, so kommt gemäss unserer Definition einzig die Zahl 7 in Frage. Soll dagegen die Gleichung $x^2 = 49$ gelöst werden, so müssen natürlich alle reellen Zahlen aufgezählt werden, die die Aussageform in eine wahre Aussage verwandeln, nämlich $x_1 = -7$ und $x_2 = 7$ oder in Form der Lösungsmenge: $L = \{-7, 7\}$.

Das Wurzelzeichen stammt aus dem 16. Jahrhundert und ist wahrscheinlich eine modifizierte Form des Kleinbuchstabens „r“, dem ersten Buchstaben des lateinischen Wortes *radix* (Wurzel).

Fast alle Wurzeln können nicht in der Menge der natürlichen Zahlen gebildet werden. Wir haben ja in einer früheren Sequenz bewiesen, dass a irrational ist, wenn a eine natürliche Zahl, aber keine Quadratzahl ist. Das hat zum Beispiel zur Konsequenz, dass man die Zahl $\sqrt{10}$ nie exakt angeben kann. Die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{10}$ ist nicht-abbrechend und nichtperiodisch. Darum ist jeder Taschenrechnerwert zwangsläufig ungenau; der Rechner schneidet nach einer gewissen Anzahl Stellen ab und rundet. Wenn er etwa den Wert 3.162277660168 anzeigt, so müssen wir uns darüber im Klaren sein, dass das nicht gleich $\sqrt{10}$ ist, sondern dass das bloss eine rationale Approximation an den realen Wurzelwert darstellt. Wir schreiben dann etwa

$$\sqrt{10} \approx 3.16$$

oder

$$\sqrt{10} = 3.16\ldots$$

um anzudeuten, dass der Wert ungenau ist, beziehungsweise, dass weiter hinten unendlich viele weitere Ziffern folgen müssten.

Wurzelgesetze

Ist eigentlich $\sqrt{4 \cdot 81} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{81}$? Eine einfache Rechnung zeigt sofort, dass das korrekt ist. Aber trifft das allgemein zu? Gilt für irgend zwei nicht-negative reelle Zahlen a und b, dass $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ist? In der Tat trifft das zu:

Satz: (Wurzelgesetz 1)
Für alle $a, b \geqslant 0$ gilt:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Ein einzelnes Beispiel kann niemals einen allgemeinen mathematischen Satz beweisen; darum müssen wir uns überlegen, wie wir das einsehen können, ohne bei konkreten Zahlen Zuflucht zu suchen. Das ist aber ganz einfach:

Beweis. Das Gesetz behauptet ja, dass $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ die Wurzel von $a \cdot b$ ist. Um das zu überprüfen, müssen wir gemäss obiger Definition bloss überprüfen, ob das Quadrat von $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ tatsächlich gleich $a \cdot b$ ist:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 &= \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) \\ &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \\ &= \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}\right) \cdot \left(\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}\right) \\ &= a \cdot b.\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir Axiome (Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation) sowie Definitionen (Definition der 2.Potenz und der Quadratwurzel). □

In analoger Weise kann man einsehen, dass auch dieses zweite Gesetz gilt:

Satz:
Für alle $a, b \geqslant 0, b \neq 0$ gilt:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Hingegen wären entsprechende Umformungen mit anderen Grundoperationen falsch. Dass etwa im Allgemeinen

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

ist, kann man leicht anhand eines Gegenbeispiels einsehen: Für $a = 9$ und $b = 16$ ist

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

aber

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

Keinesfalls dürfen wir also die Quadratwurzel einer Summe oder Differenz dadurch ziehen, dass wir die Wurzeln der beteiligten Summanden einzeln ziehen.

Unmittelbar aus der Definition der Quadratwurzel folgt, dass

> **Satz:**
>
> $$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \qquad \forall a \geqslant 0$$
>
> *und*
>
> $$\sqrt{a^2} = |a|\,, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Zieht man erst die Wurzel einer nicht-negativen Zahl a, um anschliessend zu quadrieren, so muss man erneut die Zahl a erhalten, weil a eben diejenige nicht-negative Zahl ist, deren Quadrat gleich a ist. Beginnt man umgekehrt mit einer beliebigen reellen Zahl b, quadriert diese (wodurch sie insbesondere nicht-negativ sein wird) und zieht dann die Wurzel, so landet man nicht zwingend bei der Ausgangszahl b. Diese hätte ja negativ sein können.

Wie berechnet der Taschenrechner eine Wurzel?

Die Mathematik lebt von schönen Ideen, und das zeigt sich wieder einmal deutlich im Zusammenhang mit der folgenden Frage: Wie berechnet man eigentlich eine Quadratwurzel?

Eine schöne Idee geht auf den griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n. Chr.) zurück. Nehmen wir an, wir sollen die Quadratwurzel von $a > 0$ berechnen. Wir beginnen damit, eine grobe Näherung x_0 für den gesuchten Wurzelwert zu wählen. Wäre zum Beispiel $a = 17$, so würden wir etwa $x_0 = 4$ wählen, weil das sicher „in der Nähe" des gesuchten Wurzelwertes liegt. Herons Idee war nun, schrittweise weitere Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zu erzeugen mit der Eigenschaft, dass diese Zahlfolge immer näher und näher an den realen Wert von $\sqrt{a}$ „heranstrebt". Dazu fand Heron eine Formel, welche aus einer dieser Zahlen die jeweils nächste Zahl herstellt. Die Formel lautet so:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n \geqslant 0.$$

Hat man also den Startwert x_0 gewählt, so findet man mit dieser Formel den nächsten Wert x_1:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right),$$

dann aus x_1 den nächstbesseren Wert x_2:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right),$$

dann aus x_2 den nächstbesseren Wert x_3:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right),$$

und so weiter.

Wie können wir die Formel verstehen? Nun, ganz einfach: Die Formel berechnet den Mittelwert einer zu kleinen und einer zu grossen Näherung. Zunächst einmal liefert

$$\frac{1}{2}\left(\boxed{?} + \boxed{?}\right)$$

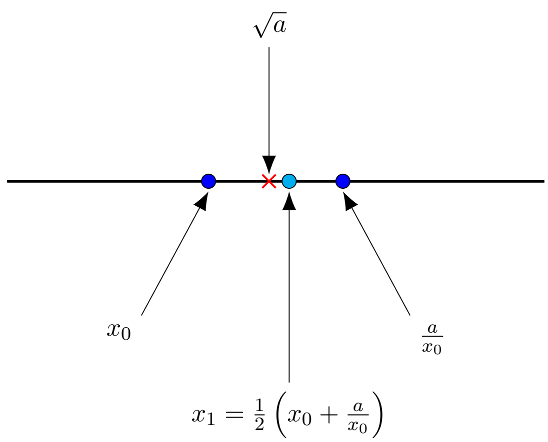
ja immer den Mittelwert zwischen den beiden Zahlen bei den Fragenzeichen. Ebenso würde man etwa den Durchschnitt von zwei Noten berechnen. Weiter: Falls $x_0 < \sqrt{a}$ ist, falls wir mit der ersten Schätzung also zu tief liegen, dann ist sicherlich $\frac{a}{x_0} > \sqrt{a}$, weil

$$x_0 \cdot \frac{a}{x_0} = a$$

ist. Wenn das Produkt zweier Zahlen gleich a ist, dann können nicht beide Faktoren kleiner als $\sqrt{a}$ oder beide grösser als $\sqrt{a}$ sein. Es muss dann zwingend der eine Faktor kleiner und der andere grösser als $\sqrt{a}$ sein. Liegen wir also mit x_0 zu tief, so ist a/x_0 dafür zu gross und umgekehrt. Die Formel

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$

berechnet also den Mittelwert einer zu tiefen und einer zu hohen Näherung von $\sqrt{a}$.



Setzt man dieses Verfahren fort, berechnet man also der Reihe nach $x_1, x_2, x_3, \ldots$, so wird diese Zahlfolge immer bessere Näherungswerte für die gesuchte Quadratwurzel liefern. In unserem Beispiel mit $a = 17$ und $x_0 = 4$ ist:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.125, \\ x_2 &= 4.1231060606\ldots, \\ x_3 &= 4.123105625617684\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

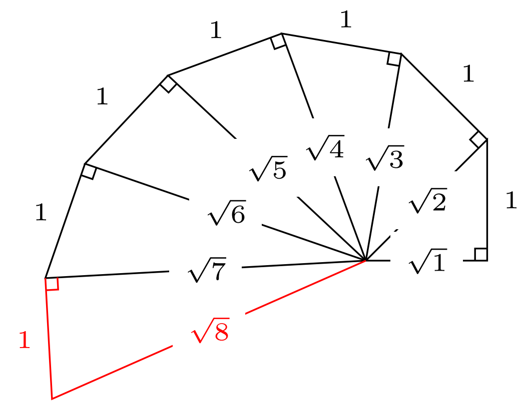
Und dies ist schon sehr nahe bei

$$\sqrt{17} = 4.123105625617661\ldots$$

Auf diese Weise kann ein Taschenrechner also in sehr kurzer Zeit ausgezeichnete Näherungswerte für Quadratwurzeln berechnen.

Ein geometrischer Blick auf Wurzeln

Es gibt verschiedene konstruktive Verfahren, um Quadratwurzeln zu erzeugen. Sehr bekannt ist etwa die folgende Wurzelspirale, in der unter Verwendung des Pythagoras-Satzes nacheinander die Quadratwurzeln von $2, 3, 4, \ldots$ konstruiert werden:



Freilich eignet sich die Spirale nicht, um beispielsweise $\sqrt{68}$ zu konstruieren. Aber in vielen Fällen kann man sich mit einem geschickt gewählten rechtwinkligen Dreieck behelfen, in diesem Fall etwa mit einem aus den Katheten-Längen 8 und 2; dann wird die Hypotenuse automatisch Länge 68 haben.

Anhang:

Konvergiert die Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ beim Heron-Verfahren überhaupt gegen die Zahl $\sqrt{a}$? Und wie schnell?

Zunächst gilt sicherlich

$$0 \leqslant \left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 = x_n^2 - 2x_n \cdot \sqrt{a} + a,$$

weil jedes Quadrat nicht-negativ ist. Löst man diese Ungleichung nach $\sqrt{a}$ auf, so erhält man:

$$\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 + a\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_{n+1}.$$

Folglich ist ab Index 1 jeder Näherungswert, den das Heron-Verfahren produziert, grösser-gleich $\sqrt{a}$:

$$x_n \geqslant \sqrt{a}, \qquad n \geqslant 1.$$

Wenn man diese Abschätzung zweimal anwendet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{a}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(x_n + x_n) \\ &= x_n \end{aligned}$$

Die Folge der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ist also monoton fallend und von unten beschränkt durch $\sqrt{a}$; daher ist sie sicherlich konvergent. Aber wogegen?

Nun, wenn die Folge gegen die Zahl s konvergiert, dann muss s eine Lösung der Fixpunktgleichung

$$s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right)$$

sein. Die einzige positive Lösung dieser Gleichung ist aber $s = \sqrt{a}$, weil

$$\begin{aligned} s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad 2s = s + \frac{a}{s} \\ &\Leftrightarrow \qquad s = \frac{a}{s} \\ &\Leftrightarrow \qquad s^2 = a. \end{aligned}$$

Folglich wird die vom Heron-Verfahren erzeugte Zahlenfolge wie erhofft gegen die Zahl $\sqrt{a}$ konvergieren.

Wie schnell wird sie das tun? Ist das Verfahren effizient? Diese Frage wollen wir im Folgenden klären. Wir vergleichen dazu $|x_{n+1} - \sqrt{a}|$ mit $|x_n - \sqrt{a}|$, um herauszufinden, wie viel näher am gesuchten Wurzelwert eine Zahl der Heron-Folge ist verglichen mit dem vorherigen Wert der Folge:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} \\ = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - 2x_n \cdot \sqrt{a} + a\right) \\ = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2. \end{aligned}$$

Da die Folge der Heron-Werte ja beschränkt ist, muss folglich eine Konstante $c > 0$ existieren, so dass

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant c \cdot \left|x_n - \sqrt{a}\right|^2.$$

Dieses Verhalten der Folge nennt man quadratische Konvergenz. Sie bedeutet, dass der Näherungswert Nummer $n+1$ näher am gesuchten Wurzelwert ist als ein bestimmtes Vielfaches des Quadrates des Abstandes des Näherungswertes Nummer n. Ist also zum Beispiel $|x_n - \sqrt{a}| \leqslant 0.01$, so muss für den nächsten Näherungswert Folgendes gelten: $|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant c \cdot 0.00001$. Das macht den Algorithmus überaus effizient; die Folge strebt sehr schnell gegen ihren Grenzwert. Und darum findet das Verfahren in der Praxis auch regen Einsatz.