Lineare Gleichungssysteme

[Grundlagen]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Was ist ein LGS?

Wir haben bereits einige Beispiele sogenannter linearer Gleichungssysteme angetroffen. Ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* ist eine endliche Menge linearer Gleichungen, die allesamt Aussageformen über dieselben Unbekannten sind. Wollen wir präzisieren, dass m lineare Gleichungen vorliegen, und dass jede davon eine Aussageform in denselben n Unbekannten ist, dann sprechen wir von einem $m \times n$ -LGS. Dies ist zum Beispiel ein 3×3 -LGS,

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 8x + y - z & = & 1 \\ \text{II} & -x + 13y + z & = & 6 \\ \text{III} & 2x - 8y + z & = & 9, \end{array}$$

weil 3 lineare Gleichungen und 3 Variablen vorkommen. Die erste genannte Zahl drückt also immer die Anzahl Gleichungen aus, während die zweite die Anzahl Unbekannte angibt.

$$\underset{\substack{\text{Anzahl}\\\text{Gleich.}}}{m} \times \underset{\substack{\text{Anzahl}\\\text{Unbek.}}}{n} - \text{LGS}, \qquad m, n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Und dies ist folglich ein 2×3 -LGS:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 7x - 3y + z & = & 1 \\ \text{II} & -0.5x + y + 2z & = & 4. \end{array}$$

Ein solches System zu lösen, bedeutet natürlich, je eine Belegung für jede der Unbekannten zu finden, so dass sämtliche Gleichungen simultan zu wahren Aussagen werden. Im ersten Beispiel müsste jede Lösung also die Form eines 3-Tupels haben, weil wir für jede der drei Unbekannten je eine Belegung finden müssen. Sollte jemand vorschlagen, dass $(1, 2, 3)$ eine Lösung des obigen 3×3 -LGS ist, so könnten wir das leicht überprüfen, indem wir überall für die erste Variable, also x, den Wert 1, für die zweite, also y, den Wert 2 und für die letzte Variable, also z, den Wert 3 einsetzen. Die linke Seite der ersten Gleichung würde dann zu

$$8 \cdot 1 + 2 - 3$$

was offensichtlich nicht 1 ergibt. Der Vorschlag wäre also falsch. Würde jemand $(1, 2, 9)$ als Lösung vorschlagen, so ergäbe der Einsetztest in der ersten Gleichung die wahre Aussage

$$8 \cdot 1 + 2 - 9 = 1.$$

Freilich dürften wir das 3-Tupel jetzt nicht vorschnell als Lösung des LGS akzeptieren. Ein 3-Tupel ist ja nur dann eine Lösung des Systems, wenn alle Gleichungen simultan erfüllt sind. Der Einsetztest in der zweiten Gleichung würde aber die falsche Aussage

$$-1 + 13 \cdot 2 + 9 = 6$$

liefern. Daher müssten wir auch diesen zweiten Vorschlag verwerfen. Halten wir also fest:

Merke:

Ein $m \times n$ -LGS zu **lösen**, bedeutet, alle n-Tupel zu finden, die, eingesetzt in die n Unbekannten, alle m Gleichungen simultan zu wahren Aussagen werden lassen.

Es soll an dieser Stelle noch betont werden, dass zur Darstellung der Unbekannten häufig nicht verschiedene Buchstaben gewählt werden. Man erhält mehr Flexibilität, wenn man immer denselben Buchstaben wählt, diesen aber indiziert. Im Falle unseres ersten Beispiels sähe das so aus:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 8x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ \text{II} & -x_1 + 13x_2 + x_3 & = & 6 \\ \text{III} & 2x_1 - 8x_2 + x_3 & = & 9. \end{array}$$

Gerade bei vielen Unbekannten hat das den Vorteil, dass man die Anzahl Unbekannte auf einen Blick erkennt und dass man nicht mühsam abzählen muss, die wievielte Variable man nun eigentlich meint. Ein beliebiges $m \times n$ -LGS hat dann diese Gestalt:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \text{II} & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ \text{„M“} & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array}$$

mit irgendwelchen reellen *Koeffizienten* $a_{i,j}$, $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$.

Ein LGS mit Substitutionen lösen

Fragen wir uns nun, wie ein LGS gelöst werden kann, und betrachten wir dazu erneut das Beispiel

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 8x + y - z & = & 1 \\ \text{II} & -x + 13y + z & = & 6 \\ \text{III} & 2x - 8y + z & = & 9. \end{array}$$

Naheliegend ist die Idee, eine Gleichung nach einer Unbekannten aufzulösen und die so gewonnene Information dann in die restlichen Gleichungen einzusetzen. Tut man dies wiederholt, so arbeitet man nach der *Substitutionsmethode*. Das soll hier detailliert erläutert werden:

Zunächst ist es grundsätzlich unerheblich, für welche Gleichung und welche Unbekannte wir uns entscheiden. Es sind nur strategische Argumente, die uns hierbei leiten können. Bei welcher Gleichung gelingt uns das Auflösen nach welcher Unbekannten am leichtesten? Wo entstehen die angenehmsten Zahlen? Und so weiter.

Wir können uns zum Beispiel dazu entschliessen, die erste Gleichung nach der Variablen z aufzulösen:

$$\text{I} \quad \Leftrightarrow \quad z = 8x + y - 1.$$

Nun können wir die so gewonnene Beziehung in beiden restlichen Gleichungen einsetzen und die erste Gleichung damit weglassen

$$\begin{array}{r|rcl} \text{II'} & -x + 13y + (8x + y - 1) & = & 6 \\ \text{III'} & 2x - 8y + (8x + y - 1) & = & 9. \end{array}$$

Warum dürfen wir die erste Gleichung nun weglassen? Ganz einfach: Die Information von Gleichung I ist ja nicht verschwunden, sie wurde vielmehr in die beiden restlichen Gleichungen eingesetzt. Wir haben sozusagen die Information von I in eine Spritze aufgezogen und sie dann in alle restlichen Gleichungen injiziert. Damit ist uns aber etwas ganz Wesentliches gelungen: Wir haben das LGS nämlich „eingekocht“. Wir haben es um eine Gleichung und eine Unbekannte reduziert auf nur noch ein 2×2 -LGS und sind somit der Lösung einen Schritt näher gekommen. Das wird noch deutlicher, wenn man im neuen, kleineren System ein paar naheliegende Vereinfachungen vornimmt:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{II'} & -x + 13y + (8x + y - 1) & = & 6 \\ \text{III'} & 2x - 8y + (8x + y - 1) & = & 9 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r|lcl} \text{II'} & 7x + 14y & = & 7 \\ \text{III'} & 10x - 7y & = & 10 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r|rcl} \text{II'} & x + 2y & = & 1 \\ \text{III'} & 10x - 7y & = & 10. \end{array}$$

In diesem neuen 2×2 -LGS können wir das Substituieren in ganz natürlicher Weise fortsetzen. Wir lösen zum Beispiel die Gleichung II‘ nach x auf und setzen die gewonnene Information in allen restlichen Gleichungen, hier also einfach in Gleichung III‘, ein:

$$\text{II'} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - 2y.$$

Substituieren in III‘ liefert:

$$\begin{array}{r|lcl} \text{III''} & 10(1 - 2y) - 7y & = & 10. \end{array}$$

Damit ist es uns gelungen, das System noch weiter „einzukochen“. Es ist nun lediglich noch vom Format 1×1. Diese eine Gleichung können wir leicht nach y auflösen:

$$\begin{aligned} & 10(1-2y) - 7y = 10 \\ \Leftrightarrow \quad & 10 - 20y - 7y = 10 \\ \Leftrightarrow \quad & -27y = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 0. \end{aligned}$$

Damit wissen wir: Wenn es überhaupt ein 3-Tupel von Zahlen gibt, für welches alle drei Gleichungen des originalen LGS zu wahren Aussagen werden, so muss die mittlere Zahl 0 sein. Anders gesagt, der Variablen y muss auf alle Fälle der Wert 0 zugewiesen werden. Wie steht es um die restlichen Variablen? Deren Werte lassen sich nun eindeutig festlegen. Wir hatten ja unter anderem die Beziehung

$$\text{II'} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - 2y$$

hergeleitet. Da y der Wert 0 zugewiesen werden muss, folgt unmittelbar, dass wir x den Wert 1 zuweisen müssen. Und da wir auch die Beziehung

$$\text{I} \quad \Leftrightarrow \quad z = 8x + y - 1$$

gefunden hatten, folgt nun, dass z der Wert 7 zugeordnet werden muss. Wir finden also genau ein 3-Tupel, welches Lösung des originalen LGS ist:

$$L = \{(1, 0, 7)\}.$$

Einzig für dieses 3-Tupel werden alle drei linearen Gleichungen simultan zu wahren Aussagen. Natürlich stellt sich sogleich die Frage, ob das wohl eine typische Situation ist oder nicht? Genauer: Wie viele Lösungen erwarten wir von einem LGS? Trifft es zum Beispiel zu, dass ein LGS, welches gleich viele Gleichungen wie Unbekannte enthält, immer genau eine Lösung hat?

Wir verschieben die Diskussion dieser interessanten Frage noch etwas und versuchen stattdessen, die Substitutionsmethode anzuwenden auf das folgende 2×3 -LGS:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 7x - 3y + z & = & 1 \\ \text{II} & -0.5x + y + 2z & = & 4. \end{array}$$

Ohne viel Mühe können wir die erste Gleichung nach der Variablen z auflösen:

$$\text{I} \quad \Leftrightarrow \quad z = -7x + 3y + 1.$$

Diese Information muss nun *in allen restlichen Gleichungen eingesetzt* werden, hier also bloss in der einen, die noch übrig ist:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{II'} & -0.5x + y + 2(-7x + 3y + 1) & = & 4. \end{array}$$

Eine naheliegende Termumformung führt auf:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{II'} & -14.5x + 7y & = & 2. \end{array}$$

Wir sehen, es ist unmöglich, daraus eindeutige Werte für die drei Variablen zu finden. Wir landen bei einer linearen Gleichung in zwei Unbekannten, die natürlich unendlich viele Lösungen hat. Eine der beiden Grössen x und y können wir offenbar frei wählen; wenn wir das aber tun, dann sind die beiden restlichen Variablen eindeutig festgelegt. Setzen wir zum Beispiel für x die beliebige reelle Zahl r ein, so ist

$$y = \frac{14.5r + 2}{7}$$

und

$$\begin{aligned} z &= -7x + 3y + 1 \\ &= -7r + \frac{43.5r + 6}{7} + 1 \\ &= \frac{-5.5r + 13}{7} \end{aligned}$$

und somit

$$L = \left\{ \left(r, \frac{14.5r+2}{7}, \frac{-5.5r+13}{7} \right) \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

In diesem Beispiel finden wir unendlich viele Lösungen, und das ist durchaus plausibel, wenn wir bedenken, dass nur zwei Gleichungen eben nicht ausreichen können, um drei Unbekannte eindeutig festzulegen.

Merken wir uns die Vorgehensweise bei der Substitutionsmethode gut:

Substitutionsmethode

Wähle eine erste Gleichung und löse sie nach einer Variablen, zum Beispiel x, auf: $x =$ Term ohne x.

Ersetze (substituiere) in allen restlichen Gleichungen diese Unbekannte durch den im ersten Schritt erhaltenen Term.

Vereinfache alle Gleichungen.

War das System vorher vom Format $m \times n$, so ist es nun vom Format $(m-1) \times (n-1)$.

Fahre so fort, bis eine einzige Gleichung erreicht ist.

Löse diese, und lege dann alle Unbekannten fest. Notiere als Lösungsmenge die Menge aller n-Tupel, für die alle Gleichungen des Systems simultan zu wahren Aussagen werden.

Ein LGS mit der Additionsmethode lösen

Betrachten wir das folgende 2×2 -LGS:

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & -x+2y & = & 1 \\ \mathrm{II} & 3x-2y & = & 17. \end{array}$$

Hier könnte uns die speziell angenehme Situation auffallen, dass die erste Gleichung den Term „$+2y$“ und die zweite Gleichung den Term „$-2y$“ enthält. Offenbar heben sich diese Terme gerade auf, wenn man sie addiert. Können wir aus dieser Beobachtung eine effiziente Lösungsmethode gewinnen? In der Tat, das geht, wir müssen dazu nur *die beiden Gleichungen addieren*. Was bedeutet das genau?

Die erste Gleichung stellt die Gleichheit zweier Terme fest, nämlich der linken und der rechten Seite. Dasselbe tut die zweite Gleichung. Da also die linke Seite der ersten Gleichung gleich der rechten Seite der ersten Gleichung und gleichzeitig die linke Seite der zweiten Gleichung gleich der rechten Seite der zweiten Gleichung ist, ist natürlich auch die Summe der beiden linken Seiten gleich der Summe der beiden rechten Seiten. Und genau das meinen wir, wenn wir sagen, wir addieren die beiden Gleichungen. In Wirklichkeit addieren wir die beiden linken Seiten und stellen fest, dass diese Summe gleich der Summe der beiden rechten Seiten ist:

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I.+II} & 2x+0 & = & 18. \end{array}$$

Der Erfolg zeigt sich unmittelbar. Durch Addition ist die zweite Unbekannte verschwunden, und wir haben bloss noch eine - ebenfalls lineare - Gleichung in einer Unbekannten, die nun leicht lösbar ist: $x = 9$. Durch Einsetzen in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen finden wir, dass $y = 5$ sein muss. Somit hat das LGS die eindeutige Lösung

$$L = \{(9,5)\}.$$

Betrachten wir das LGS erneut:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & -x+2y & = & 1 \\ \text{II} & 3x-2y & = & 17. \end{array}$$

Alternativ zur eben gezeigten Vorgehensweise hätten wir auch so verfahren können: Multipliziert man I mit 3, so entsteht gerade der Term „$-3x$“, welcher sich dann bei Addition zu „$3x$“ aufhebt. Manchmal ist es also durchaus sinnvoll, zuerst eine der Gleichungen mit einer geeigneten Zahl so zu multiplizieren, dass anschliessend bei der Addition eine Unbekannte verschwindet. Hier sieht das so aus: Multiplikation von I mit 3 liefert das neue System

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I'} & -3x+6y & = & 3 \\ \text{II'} & 3x-2y & = & 17. \end{array}$$

Addieren wir nun die beiden linken und auch die beiden rechten Seiten, so ergibt sich

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I'.+II} & 0+4y & = & 20. \end{array}$$

Daraus errechnen wir sofort $y = 5$ und dann - nach Einsetzen in eine der Originalgleichungen - $x = 9$.

Wie funktioniert die Additionsmethode bei grösseren Systemen? Nehmen wir uns dazu erneut das schon weiter oben gelöste 3×3 LGS

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 8x+y-z & = & 1 \\ \text{II} & -x+13y+z & = & 6 \\ \text{III} & 2x-8y+z & = & 9 \end{array}$$

vor. Es fällt auf, dass man die linken respektive rechten Seiten der Gleichungen I und II addieren kann, um die Variable z loszuwerden:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I.+II} & 7x+14y+0 & = & 7. \end{array}$$

Wir geben dieser Gleichung die Nummer IV und vereinfachen sie gleich:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{IV} & x+2y & = & 1. \end{array}$$

Jetzt müssen wir einen weiteren Additionsschritt vornehmen. Dabei ist aber entscheiden, dass wir auch wieder die Variable z eliminieren. Würden wir eine andere Unbekannte wegschaffen, so hätten wir nachher mit den Gleichungen IV und V zwar eine Gleichung weniger als am Anfang, aber noch immer alle drei Unbekannten. Ferner ist es entscheidend, dass wir nun Gleichung III benutzen, die bisher noch nicht zum Einsatz gekommen ist. Ob wir sie allerdings zusammen mit I oder mit II benutzen, ist einerlei und bloss eine Geschmacksfrage.

Wir machen es uns hier ganz einfach und arbeiten mit den Gleichungen I und III weiter. Addition der linken respektive rechten Seiten liefert:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I.+III} & 10x-7y+0 & = & 10. \end{array}$$

Das ist nun unsere Gleichung Nummer V:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{V} & 10x-7y & = & 10. \end{array}$$

Nun ist dasselbe erreicht wie bei der Substitutionsmethode nach dem ersten Einsetzschritt: Wir haben das LGS „eingekocht“, wir haben es auf das Format 2×2 reduziert:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{IV} & x+2y & = & 1 \\ \text{V} & 10x-7y & = & 10. \end{array}$$

Wie man jetzt fortfährt, ist wiederum Geschmackssache. Wir können die Substitutionsmethode benutzen oder der Additionsmethode treu bleiben. Wir entscheiden uns für das zweite. Nun muss aber zwingend eine der beiden

Gleichungen geeignet multipliziert werden, damit bei der anschliessenden Addition eine Variable entfällt. Wir multiplizieren zum Beispiel IV mit -10:

$$\begin{array}{r|rcl} -10\cdot\text{IV} & -10x-20y & = & -10 \\ \text{V} & 10x-7y & = & 10. \end{array}$$

Addition der linken respektive rechten Seiten liefert nun $-27y=0$ und somit $y=0$. Durch Einsetzen in V erhalten wir $x=1$ und durch Einsetzen in eine der Originalgleichungen $z=7$. Auch die Additionsmethode liefert natürlich die eine eindeutige Lösung

$$L=\{(1,0,7)\}\,.$$

Merken wir uns auch die allgemeine Vorgehensweise bei der Additionsmethode:

Additionsmethode

Multipliziere die Gleichungen I und II mit geeigneten Zahlen so, dass bei Addition I+II eine Unbekannte, etwa x, rausfällt.

Wiederhole diesen Schritt mit den Gleichungen I+III, I+IV, und so weiter. Eliminiere aber jedes Mal dieselbe Variable x. (Allgemeiner könnte man sagen, dass insgesamt $n-1$ Paarbildungen von Gleichungen nötig sind, bei denen immer dieselbe Variable eliminiert wird.)

War das System vorher vom Format $m\times n$, so ist es nun vom Format $(m-1)\times(n-1)$.

Fahre so fort, bis eine einzige Gleichung erreicht ist.

Löse diese, und lege dann alle Unbekannten fest. Notiere als Lösungsmenge die Menge aller n-Tupel, für die alle Gleichungen des Systems simultan zu wahren Aussagen werden.

Wir haben mehrfach die Frage gestreift, wie viele Lösungen ein $m\times n$ -LGS eigentlich haben kann. Im nächsten Abschnitt versuchen wir, darauf eine befriedigende Antwort zu geben.

Wie viele Lösungen hat ein 2×2 -LGS?

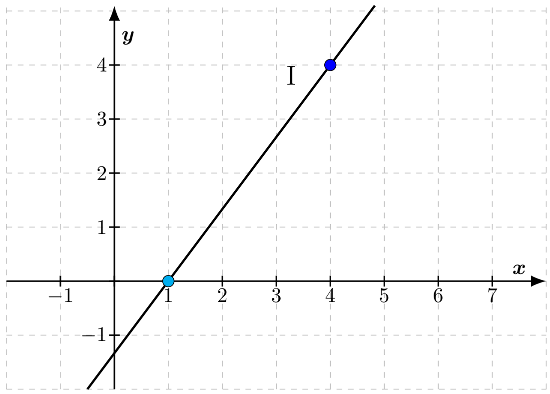
Betrachten wir das folgende LGS:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 4x-3y & = & 4 \\ \text{II} & -2x+3y & = & 1. \end{array}$$

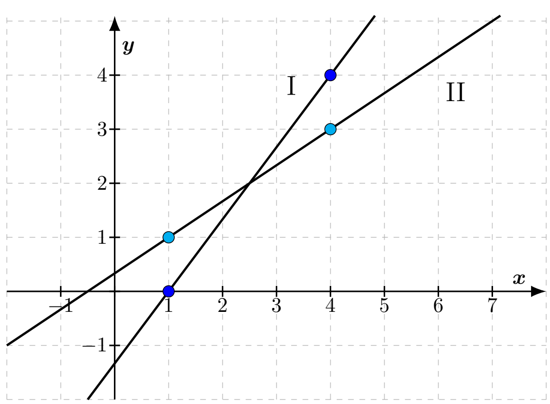
Wir können jede dieser Gleichungen im Koordinatensystem darstellen, indem wir 2-Tupel suchen, die beide Gleichungen erfüllen. Besonders einfach gelingt das, wenn wir die Gleichungen nach y auflösen, sofern das geht:

$$\begin{array}{r|lcl} \text{I} & y & = & \frac{4}{3}x-\frac{4}{3} \\ \text{II} & y & = & \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}. \end{array}$$

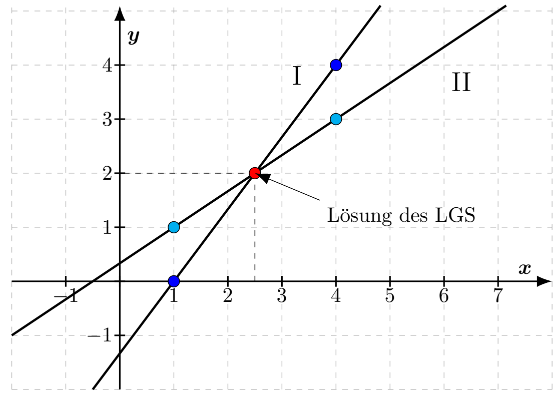
Nun ist es ein Leichtes, zu beliebig gewählten x-Werten die zugehörigen y-Werte zu berechnen. Wählt man etwa in I $x=1$, so erhält man $y=0$, und mit jeder Erhöhung von x um 3 wächst y um 4 an. Die folgende Gerade stellt somit alle 2-Tupel (x,y) dar, die Gleichung I zu einer wahren Aussage machen:



Wählt man dann in II $x = 1$, so erhält man $y = 1$, und mit jeder Erhöhung von x um 3 wächst y um 2 an. Wir zeichnen also die Gerade aller 2-Tupel, die Gleichung II erfüllen dazu und erhalten die folgende Grafik:



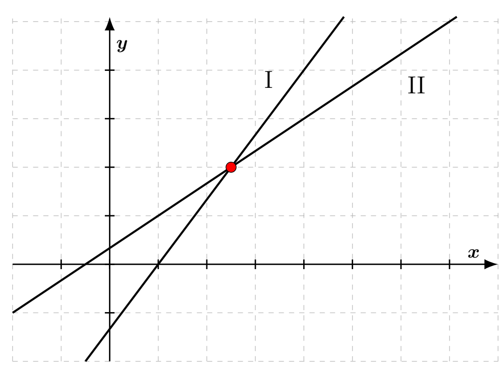
Nun wird klar, dass es genau ein 2-Tupel gibt, welches beide Gleichungen simultan erfüllt, und dies ist das 2-Tupel, welches zum Schnittpunkt der beiden Geraden gehört:



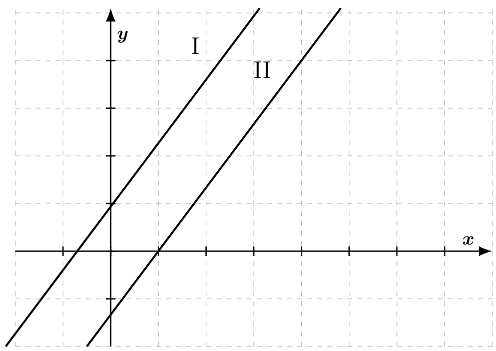
Freilich ist es nicht sinnvoll, die Lösung aus der Grafik abzulesen. Ob die x-Koordinate des Lösungs-Tupels nun genau 2.5 beträgt oder doch vielleicht 2.45 oder 2.437, kann unmöglich genau herausgelesen werden. Aber das bringt uns nicht in Verlegenheit. Wir haben ja Methoden entwickelt, wie die Lösung eines solchen LGS berechnet werden kann. Tut man dies, so erhält man $L = \{(2.5, 2)\}$.

Von entscheidender Bedeutung an dieser Stelle ist ein ebenso einfaches wie elegantes Argument: Da jede der beiden Gleichungen eines 2×2 -LGS als Gerade in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann, kann es bezüglich der Anzahl Lösungen des Systems nur die drei folgenden Fälle geben:

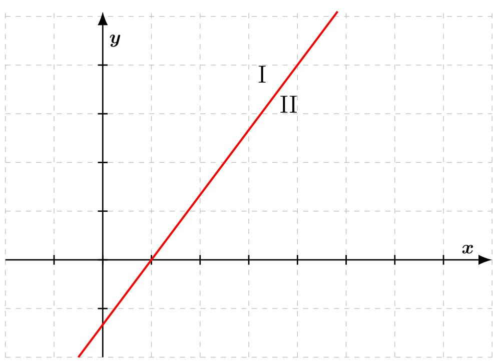
1. Die beiden Geraden schneiden sich. Dann gibt es genau eine Lösung des Systems.



2. Die beiden Geraden sind parallel (und liegen nicht aufeinander). Dann besitzt das System keine Lösung.



3. Die beiden Geraden liegen aufeinander. Dann besitzt das System unendlich viele Lösungen.



Insbesondere ist es also unmöglich, dass ein 2×2 -LGS genau zwei oder genau sieben oder genau neunzehn Lösungen hat. Wenn es nicht eindeutig lösbar ist, dann hat es entweder gar keine oder aber unendlich viele Lösungen - jedenfalls dann, wenn man als Grundmenge für beide Variablen $\mathbb{R}$ wählt.

Betrachten wir zu den Fällen 2.) und 3.) je ein Beispiel. Dem LGS

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & 4x - 3y & = & 4 \\ \mathrm{II} & -x + \frac{3}{4}y & = & 2 \end{array}$$

sieht man vielleicht nicht auf den ersten Blick an, dass eine spezielle Situation vorliegt. Multipliziert man allerdings Gleichung II mit -4, so wird es deutlicher:

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & 4x - 3y & = & 4 \\ (-4)\cdot\mathrm{II} & 4x - 3y & = & -8. \end{array}$$

Es ist offenbar unmöglich, zwei Zahlen x und y so zu finden, dass der Term $4x - 3y$ gleichzeitig den Wert 4 und den Wert -8 hat. Das LGS besitzt also keine Lösung. Die zugehörigen Geraden sind parallel.

Ebenso sieht man dem LGS

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & 4x - 3y & = & 4 \\ \mathrm{II} & -x + \frac{3}{4}y & = & -1. \end{array}$$

vielleicht nicht auf den ersten Blick an, dass eine spezielle Situation vorliegt. Multipliziert man allerdings Gleichung II mit -4 , so wird es deutlicher:

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & 4x - 3y & = & 4 \\ (-4)\cdot\mathrm{II} & 4x - 3y & = & 4. \end{array}$$

Die beiden Aussageformen sind nun identisch, liefern also dieselbe Gerade im Koordinatensystem. Das System besitzt daher unendlich viele Lösungen.

Singulär und Regulär

Da die Anzahl Lösungen eines LGS eine sehr wichtige Grösse ist und man sich üblicherweise genau eine Lösung wünscht, hat man in der Mathematik Fachbegriffe eingeführt, die diesen Sachverhalt charakterisieren. Ein LGS heisst *singulär*, wenn es gar keine Lösung oder aber unendlich viele Lösungen hat und sonst *regulär*. Natürlich bilden reguläre Systeme mit genau einer Lösung den Normalfall. Prägen wir uns also ein:

Definition:
Ein LGS, das eine eindeutige Lösung hat, heisst ***regulär****.*
Ein LGS mit leerer Lösungsmenge oder unendlich vielen Lösungen heisst ***singulär****.*

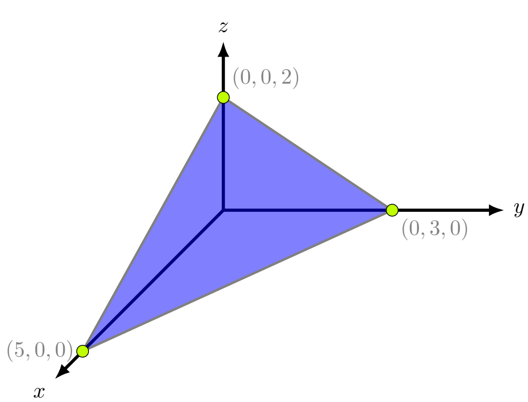
Genau genommen haben wir erst für ein 2×2 -LGS nachgewiesen, dass es bezüglich der Anzahl Lösungen keine weiteren Möglichkeiten gibt. Wie ist denn das für beliebige lineare Gleichungssysteme?

Wie viele Lösungen hat ein 3×3 -LGS?

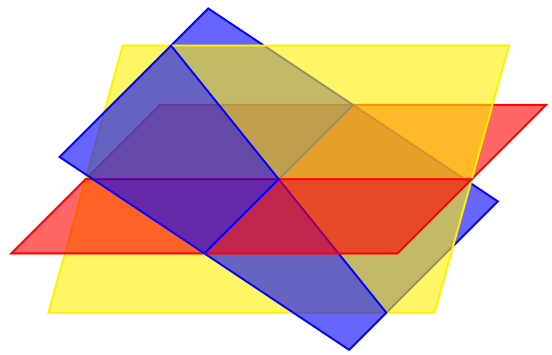
Wir haben schon weiter oben erwähnt, dass eine lineare Gleichung in drei Unbekannten im Raum als eine Ebene dargestellt werden kann. Zum Beispiel ergibt die Gleichung

$$6x + 10y + 15z - 30 = 0$$

bei graphischer Darstellung in einem dreidimensionalen Koordinatensystem die folgende Ebene, die man sich allerdings auf alle Seiten unendlich fortgesetzt denken muss:



Kommt eine weitere lineare Gleichung in denselben drei Unbekannten hinzu, so entsteht eine weitere Ebene, die die erste Ebene im Normalfall in einer Geraden schneidet. Und kommt eine dritte Gleichung in denselben drei Unbekannten hinzu, so entsteht eine dritte Ebene, die die beiden ersten Ebenen im Normalfall so schneidet, dass insgesamt genau ein Schnittpunkt entsteht.



Freilich kann es andere Situationen geben. Es könnten zwei Ebenen parallel sein, dann besitzt das LGS offenbar keine Lösung, weil sich kein 3-Tupel finden lässt, das auf allen Ebenen zugleich liegt. Oder es könnten sich alle drei Ebenen in einer gemeinsamen Geraden schneiden, dann besitzt das LGS unendlich viele Lösungen. Es sind zahlreiche Schnittsituationen denkbar, aber egal, wie die drei Ebenen zueinander stehen, es gibt abermals nur diese drei Fälle: Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung oder es ist singulär und hat somit gar keine Lösung oder unendlich viele.

Wie viele Lösungen hat ein beliebiges LGS?

Um das zu ergründen, denken wir uns zunächst, dass ein beliebiges $n \times n$ -LGS vorliegt, also ein Gleichungssystem mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten. In Gedanken wenden wir die

Substitutionsmethode an und „kochen das System schrittweise ein“. Im Normalfall wird das System mit jedem Schritt um eine Gleichung und eine Unbekannte reduziert:

$$n\times n \to (n-1)\times(n-1) \to (n-2)\times(n-2) \to \dots$$

Wenn nichts schief geht - und wir müssen nachher präzisieren, was das heissen könnte - landen wir schliesslich bei einem 1×1 -LGS, also einer einzigen linearen Gleichung in nur einer Unbekannten. Bekanntlich hat eine solche Gleichung genau eine Lösung. Wir können also diese eine Unbekannte in eindeutiger Weise festlegen. Indem wir nun durch Rückwärtseinsetzen auch alle restlichen Unbekannten festlegen, finden wir am Ende genau ein n-Tupel, welches Lösung des gesamten Systems ist. Es gibt also genau eine Lösung. Oder etwas geht schief…

Natürlich kann es sein, dass zwei der n Gleichungen sich gegenseitig widersprechen, wie etwa hier:

$$\begin{array}{r|rcl} \vdots & & \dots & \\ \mathrm{II} & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 + x_6 & = & 6 \\ \vdots & & \dots & \\ \mathrm{V} & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 + x_6 & = & 7 \\ \vdots & & \dots & \end{array}$$

Dann hat das System keine Lösung und ist somit singulär. Oder es kann sein, dass zwei Gleichungen identisch sind. Wir können dann eine Gleichung weglassen und landen bei einem *unterbestimmten* System. Wir haben dann (mindestens) eine Gleichung weniger als Unbekannte, und bei schrittweiser Anwendung der Substitutionsmethode findet man schliesslich eine einzige Gleichung mit mindestens zwei Unbekannten. Dann muss es natürlich unendlich viele Lösungen geben, und das System ist ebenfalls singulär.

Also gilt auch für beliebige $n\times n$ -Systeme, was wir über 2×2 -Systeme gesagt haben: Es gibt eine eindeutige Lösung - das System ist regulär - oder das System ist singulär mit entweder gar keiner Lösung oder unendlich vielen Lösungen.

Zum Schluss denken wir uns ein ganz beliebiges $m\times n$ -LGS gegeben. Den Fall $m=n$ haben wir vorher schon diskutiert. Daher betrachten wir nun noch die beiden folgenden Fälle:

1. Fall: $m < n$

   Das System ist *unterbestimmt*, denn es hat weniger Gleichungen als Unbekannte. Es könnte zum Beispiel so aussehen:

   $$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 3 \\ \mathrm{II} & 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 5 \\ \mathrm{III} & -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 1. \end{array}$$

   Durch Anwendung der Substitutionsmethode könnten wir dieses System schrittweise verkleinern:

   $$3\times 4 \to 2\times 3 \to 1\times 2.$$

   Wir würden dann also bei einer einzigen linearen Gleichung in zwei Unbekannten landen, und diese liesse sich auf unendlich viele Arten lösen. Darum besässe das ursprüngliche System unendliche viele 4-Tupel in der Lösungsmenge und wäre somit singulär.

   Allgemein ist es also fast immer zutreffend, dass ein unterbestimmtes System singulär mit unendlich vielen Lösungen ist. In Ausnahmefällen könnte es natürlich auch so sein, dass zwei Gleichungen einander widersprechen, so dass das System gar keine Lösung besitzt.

2. Fall: $m > n$

In diesem Fall besitzt das LGS mehr Gleichungen als Unbekannte; es ist also *überbestimmt*. Es könnte etwa so aussehen:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & x - 3y & = & 2 \\ \text{II} & 2x - y & = & 9 \\ \text{III} & x + y & = & 7. \end{array}$$

Hier könnte man etwa so vorgehen, dass man die überzähligen Gleichungen zunächst ausser Acht lässt und ein quadratisches Teilsystem löst. Bei dem Beispielsystem könnte man also zuerst nur das 2×2 -LGS lösen, das aus den beiden ersten Gleichungen besteht. Man würde dann die Lösung $x = 5$, $y = 1$ finden. Ein einfacher Einsetztest in der dritten Gleichung zeigt dann, ob dieses Tupel sogar Lösung vom Originalsystem ist oder nicht. Hier wäre das nicht der Fall, denn $5 + 1$ ergibt nicht 7. Das Beispielsystem ist somit singulär mit leerer Lösungsmenge. Es hätte aber auch sein können, dass die Zahlen $x = 5$ und $y = 1$ auch die dritte Gleichung erfüllen; dann allerdings wäre das Beispielsystem regulär.

Allgemein kann man bei einem überbestimmten LGS so vorgehen, dass man zunächst ein quadratisches Teilsystem löst. Im Normalfall liefert das genau ein Lösungstupel. Mit der Einsetzprobe in den restlichen Gleichungen erkennt man leicht, ob dieses Tupel tatsächlich Lösung des gesamten Systems ist oder eben nicht. Das überbestimmte LGS kann also singulär mit leerer Lösungsmenge oder auch regulär sein. Es kann sogar singulär mit unendlich vielen Lösungen sein - dann nämlich, wenn unter all den Gleichungen so viele identische Gleichungen vorkommen, dass nach Weglassen der „Kopien“ ein unterbestimmtes System übrigbleibt.

Natürlich sind all diese Spezialfälle eben Ausnahmen. In der Regel liegt ein quadratisches und reguläres System vor. Wichtig ist aber zu verstehen, dass es bei einem beliebigen LGS ausser den erwähnten Situationen keinen weiteren Fall geben kann. Ein LGS ist stets regulär mit genau einer eindeutigen Lösung, oder es ist singulär und besitzt dann gar keine Lösung oder gleich unendlich viele.

MERKE:

Ein $m \times n$ -LGS ist stets entweder regulär und besitzt somit genau ein eindeutiges Lösungstupel, oder es ist singulär und besitzt somit gar keine Lösung oder gleich unendlich viele.

Gausselimination

Die Gausselimination ist ein weiteres Verfahren (ein Algorithmus) zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Es findet sich beispielhaft bereits in den Neun Büchern arithmetischer Technik, einem chinesischen Mathematikbuch, welches zwischen 200 vor und 100 nach Christus entstanden ist. Benannt ist es nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauss, der 1810 das allgemeine Verfahren beschrieben und veröffentlicht hat. Er hat es nachweislich zur Berechnung der Bahn des Asteroiden Pallas zwischen 1803 und 1809 benutzt.

Dieses Verfahren hat verschiedene Vorteile: Es reduziert den Schreibaufwand stark, es ist effizient, und es lässt sich relativ leicht in ein Computerprogramm umbauen.

Abbildung 1: Carl Friedrich Gauss

Die Koeffizienten-Matrix - eine sparsame Notation

Stellen wir uns vor, wir möchten das folgende LGS lösen:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & 2x - y + z & = & 7 \\ \text{II} & x + 3y + 2z & = & 1 \\ \text{III} & -x - 2y + z & = & 6. \end{array}$$

Könnte man den Informationsgehalt dieses Systems nicht auch viel kürzer, nämlich mit weniger Zeichen ausdrücken? In der Tat lässt sich das leicht bewerkstelligen. Wir müssen uns nur darauf einigen, dass Gleichungen in einem LGS stets so dargestellt werden, dass rechts vom Gleichheitszeichen nur eine Konstante steht und dass links vom Gleichheitszeichen die Variablen in immer derselben (zum Beispiel lexikographischen) Reihenfolge gelistet werden, so wie das in obiger Schreibweise ja der Fall ist. Zudem können wir leicht verlangen, dass zwischen den Summanden ausschliesslich Pluszeichen stehen, indem wir allfällige Minuszeichen „zu den Koeffizienten ziehen“:

$$\begin{array}{r|ccccccc} \text{I} & 2 \cdot x & + & (-1) \cdot y & + & z & = & 7 \\ \text{II} & x & + & 3 \cdot y & + & 2 \cdot z & = & 1 \\ \text{III} & (-1) \cdot x & + & (-2) \cdot y & + & z & = & 6. \end{array}$$

Wenn wir vereinbaren, uns stets an diese *Normalform* zu halten, dann reicht es offenbar aus, bloss die Koeffizienten und die Konstanten aufzuschreiben. Dies tut man in einer sogenannten *Matrix*, einem rechteckigen Schema von Zahlen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Dabei enthält eine (horizontale) *Zeile* der Reihe nach alle Koeffizienten sowie die Konstante einer einzelnen Gleichung. Und eine (vertikale) *Spalte* zeigt alle Koeffizienten derselben Variable über alle Gleichungen hinweg - respektive alle Konstanten. Beachten Sie ausserdem, dass eine Unbekannte, vor der kein Faktor steht, natürlich den Koeffizienten 1 hat.

Aus dieser Darstellung lässt sich das LGS einfach und eindeutig rekonstruieren. Man nennt diese Matrix erweiterte Koeffizienten-Matrix, weil sie alle Koeffizienten enthält und erweitert um die Konstanten ist. Es ist schon ein kleiner Gewinn, mit dieser Matrix anstelle des originalen LGS zu arbeiten, weil man weniger schreiben muss. Der Gewinn wird aber noch viel grösser sein, wenn wir lernen, den gesamten Lösungsprozess nur mit der Matrix durchzuführen; und genau darum wird es im Folgenden gehen. Merken wir uns zunächst noch dies:

Merke:

Ein LGS liegt in **Normalform** vor, wenn rechts vom Gleichheitszeichen eine Konstante steht und links vom Gleichheitszeichen die Variablen stets in derselben (zum Beispiel lexikographischen) Reihenfolge gelistet sind und überall nur Pluszeichen stehen:

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ldots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Zu einem solchen LGS kann die **erweiterte Koeffizienten-Matrix** gebildet werden:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

Diese Matrix beinhaltet dieselbe Information wie das LGS, und das LGS kann aus ihr eindeutig rekonstruiert werden.

Operationen, die die Lösungsmenge unverändert lassen

Die Gausselimination arbeitet mit der erweiterten Koeffizienten-Matrix anstelle des originalen LGS, was Schreibarbeit spart. Und sie formt die Matrix so um, dass die Lösung schliesslich leicht ablesbar wird. Wir müssen uns also fragen, was für Umformungen der Matrix schliesslich die Lösung produzieren. Da hinter den Zeilen der Matrix immer Gleichungen des LGS stehen, müssen wir uns also fragen, was für Umformungen der Gleichungen in einem LGS die Lösungsmenge unverändert lassen. Denn wir wollen ja verhindern, dass die Methode am Ende eine falsche Lösung liefert oder eine Lösung nicht findet.

In der Tat gibt es drei Operationen, die wir bedenkenlos auf die Zeilen der Matrix anwenden können, ohne die Lösungsmenge zu verändern: Wir dürfen zwei Zeilen vertauschen, wir dürfen eine Zeile mit einer Zahl ungleich 0 multiplizieren, und wir dürfen eine Gleichung zu einer anderen addieren. Denken wir genauer darüber nach:

Vertauschen zweier Zeilen

Es ist trivial, dass dadurch die Lösungsmenge nicht verändert wird. Vertauscht man zwei Gleichungen im ursprünglichen LGS, so kann das sicherlich keinen Einfluss auf die Lösungsmenge haben. Wir dürfen also, wenn das hilfreich ist, ohne weiteres zwei Zeilen der Matrix vertauschen. Sie werden sehen, dass ein solcher Schritt zum Beispiel dann angebracht ist, wenn die erste Zeile mit einer 0 anfängt, weil das Lösungsverfahren nur gelingt, wenn sie mit einer Zahl ungleich 0 anfängt.

Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0

Wir dürfen jederzeit eine ganze Zeile mit einer Zahl ungleich Null multiplizieren. Bezogen auf das zugrundeliegende LGS heisst das ja bloss, dass eine Gleichung mit einer Zahl ungleich Null multipliziert wird. Dadurch ändert sich die Lösungsmenge des Systems nicht. Betrachten wir zum Beispiel die Aussageform

$$x - 3y + 2z = 4. \qquad (\star)$$

Sie könnte Teil eines LGS sein. Multiplizieren wir diese Gleichung mit einer Zahl $k \neq 0$, so entsteht

$$k \cdot x - (3k) \cdot y + (2k) \cdot z = k \cdot 4. \qquad (\star\star)$$

Offenbar ist ein Tupel genau dann Lösung von ($\star$), wenn es Lösung von ($\star\star$) ist, denn wir können ($\star\star$) jederzeit wieder durch k dividieren, um die ursprüngliche Gleichung zu erhalten.

Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile

Angenommen, wir sollen das folgende LGS lösen und beschliessen, die i-te Zeile zur j-ten Zeile zu addieren:

$$\begin{array}{c|ccc} \vdots & & \vdots & \\ \text{(i)} & a \cdot x + b \cdot y + \ldots & = & u \\ \vdots & & \vdots & \\ \text{(j)} & p \cdot x + q \cdot y + \ldots & = & v \\ \vdots & & \vdots & \end{array} \qquad (\heartsuit)$$

Durch diesen Additionsschritt entsteht das folgende neue LGS:

$$\begin{array}{c|rcl} \vdots & & \vdots & \\ \text{(i)} & ax + by + \ldots & = & u \\ \vdots & & \vdots & \\ \text{(j')} & (a+p)x + (b+q)y + \ldots & = & u + v \\ \vdots & & \vdots & \end{array} \qquad (\heartsuit\heartsuit)$$

Wir müssen einsehen, dass die Lösungsmenge des Systems sich dadurch nicht verändern kann, dass also ein Tupel, welches LGS ($\heartsuit$) löst, auch LGS ($\heartsuit\heartsuit$) löst und umgekehrt. Warum ist das so?

Nun, wenn ein Tupel LGS ($\heartsuit$) löst, dann erfüllt es insbesondere die beiden Gleichungen (i) und (j). Da es diese beiden Gleichungen erfüllt, erfüllt es auch deren Summe, (j'). Und darum ist es auch Lösung von LGS ($\heartsuit\heartsuit$). Wenn ein Tupel umgekehrt LGS ($\heartsuit\heartsuit$) löst, dann erfüllt es insbesondere die beiden Gleichungen (i) und (j'). Da es diese beiden Gleichungen erfüllt, erfüllt es auch die Differenz (j')−(i), und das ist gerade Gleichung (j). Darum löst das Tupel auch LGS ($\heartsuit$).

Wir sehen: Wir verändern die Lösungsmenge eines LGS nicht, wenn wir eine Gleichung zu einer anderen addieren.

MERKE:

Die folgenden drei Operationen lassen die Lösungsmenge eines LGS unverändert:

Vertauschen zweier Zeilen.

Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $k \neq 0$.

Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Wir dürfen solche Operationen in beliebiger Zahl anwenden. Es erhebt sich sofort die interessante Frage, wie wir damit einem LGS die Lösung(en) auf elegante Weise entlocken können.

Treppenform

Angenommen, wir sollen das folgende LGS lösen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Dann würde uns die Lösungsfindung doch ausserordentlich leicht fallen. Denn da einige der Koeffizienten 0 sind, lautet das LGS, rückübersetzt in Gleichungen, einfach so:

$$\begin{array}{r|ccccccc} \text{I} & x & + & (-3) \cdot y & + & 2 \cdot z & = & 1 \\ \text{II} & & & y & + & 4 \cdot z & = & 5 \\ \text{III} & & & & & z & = & 6 \end{array}$$

Den Wert von z könnten wir aus III sofort ablesen und durch Einsetzen in II dann den Wert von y bestimmen. Schliesslich könnten wir durch Einsetzen in I den Wert von x ermitteln. Eine Matrix in dieser speziellen Form wäre also ein schönes Geschenk. Freilich liegen Matrizen meist nicht in dieser günstigen Form vor. Aber - und das ist der entscheidende Punkt - wir können ein LGS stets in diese sogenannte Treppenform bringen, indem wir nämlich die oben diskutierten Operationen in geschickter Weise anwenden. Dies soll hier anhand des Beispiels

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

demonstriert werden. Es muss uns also darum gehen, unterhalb der hier angedeuteten Treppe Nullen hinzubekommen:

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Beginnen wir mit der Zahl links unten. Wie können wir dort eine 0 hinbekommen? Nun, ganz einfach: Wir addieren die 2. zur 3. Zeile:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{II zu} \\ \text{III add.}}]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Wir sind sicher, dass durch Anwenden dieser Operation sich die Lösungsmenge nicht verändert. Das neue System ist also äquivalent zum ursprünglichen. Weiter: Wir leiten eine weitere 0 her, diesmal im vordersten Eintrag der 2. Zeile. Dazu multiplizieren wir diese mit -2 und addieren dann die 1. zur 2. Zeile:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{II}\cdot(-2)]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ -2 & -6 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{I zu} \\ \text{II add.}}]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Mit etwas Übung kann man das gut auch in einem einzigen Schritt durchführen. Zum Schluss müssen wir noch die dritte 0 hinbekommen. Dazu multiplizieren wir die 3. Zeile mit 7 und addieren dann die 2. zur 3. Zeile:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}\cdot 7]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 21 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{II zu} \\ \text{III add.}}]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & 54 \end{bmatrix}.$$

In der 3. Zeile können wir noch durch Multiplikation mit 1/18 kleinere Zahlen hinbekommen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Damit ist die Treppenform erreicht, und wir können sicher sein, dass dieses neue LGS dieselbe Lösungsmenge hat wie das ursprüngliche, denn wir haben nur die oben diskutierten Operationen benutzt. In Gleichungen zurück übersetzt sieht das LGS nun so aus:

$$\begin{array}{r|ccccccc} \text{I} & 2\cdot x & + & (-1)\cdot y & + & z & = & 7 \\ \text{II} & & & (-7)\cdot y & + & (-3)\cdot z & = & 5 \\ \text{III} & & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Und daraus lassen sich die Werte der Variablen von unten nach oben leicht herauslesen. Wir finden die Lösung $L = \{(1, -2, 3)\}$.

Fassen wir zusammen

Gausselimination

Ziel der **Gausselimination** ist es, das in Normalform vorliegende LGS erst als **erweiterte Koeffizienten-Matrix** darzustellen und diese dann in die **Treppenform** zu bringen:

$$\begin{bmatrix} \star & \cdots & \cdots & \cdots & & c_1 \\ 0 & \star & \cdots & \cdots & & c_2 \\ 0 & 0 & \star & \cdots & & c_3 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & c_n \end{bmatrix}$$

Dies kann durch Anwendung der drei weiter oben diskutierten Operationen immer erreicht werden.

Im Normalfall entsteht dabei eine Matrix wie die abgebildete mit Zahlen $\star$ ungleich 0 und irgendwelchen Konstanten c_i. Daraus lässt sich das Lösungstupel von unten nach oben herausarbeiten.

Strategiefragen

Es fällt auf, dass wir die erstgenannte Operation, das Vertauschen von zwei Zeilen, bisher nicht verwendet haben. Ist sie jemals angebracht? Ja, in der Tat. Zum Beispiel könnte der vorderste Koeffizient der ersten Zeile eine 0 sein:

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

In diesem Fall müssten wir zuerst die Zeilen I und II vertauschen, um die Treppenform erreichen zu können. Es ist wichtig, dass wir uns eine gute Strategie zurechtlegen. Man kann nämlich durchaus sehr ungeschickt vorgehen. Angenommen, wir sollen erneut dieses LGS lösen:

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Die Treppenmarkierungen zeigen, wo wir Nullen haben möchten. Wir könnten auf die Idee kommen, zuerst im zweiten Eintrag der 3. Zeile eine 0 zu erschaffen. Das lässt sich zum Beispiel erreichen, indem wir die 3. Zeile mit -0.5 multiplizieren und dann die erste zur dritten Zeile addieren:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}\cdot(-0.5)]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & -0.5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{I zu} \\ \text{II add.}}]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2.5 & 0 & 0.5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Das wäre denkbar ungeschickt. Denn in der Fortsetzung des Verfahrens, bei der Herstellung der weiteren Nullen, müsste man die soeben gewonnene Null mit grosser Wahrscheinlichkeit wieder opfern. Um nämlich nun im ersten Eintrag der 3. Zeile eine Null hinzubekommen, müssten wir (nach geeigneter Multiplikation) die 1. oder 2. Zeile zur 3 addieren, und dabei würde unsere Null zerstört.

Es ist darum wichtig, dass man sich sehr genau überlegt, in welcher Reihenfolge man welche Nullen herstellt. Eine einmal erreichte Null sollte keinesfalls wieder geopfert werden müssen.

Pivots und RREF

Angenommen, es ist uns gelungen, die Treppenform zu erreichen und wir haben in der Diagonalen lauter Zahlen ungleich Null - hier wieder mit $\star$ bezeichnet:

$$\begin{bmatrix} \star & \cdots & \cdots & \cdots & & c_1 \\ 0 & \star & \cdots & \cdots & & c_2 \\ 0 & 0 & \star & \cdots & & c_3 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & c_n \end{bmatrix}$$

Die mit $\star$ bezeichneten Koeffizienten heissen Pivot-Elemente. Es sind jeweils die ersten Koeffizienten ungleich Null in den einzelnen Zeilen. Es ist nun ein Leichtes, diese Pivots in Einsen umzuwandeln. Wir müssen dazu bloss jede Zeile durch das Pivot dividieren, was an der Lösungsmenge bekanntlich nichts ändert. Dann erreichen wir die folgende besonders angenehme Form mit neuen Konstanten d_i:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & d_3 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

Diese Form heisst *normierte Zeilenstufenform*, und ihr Vorteil ist offenbar, dass die einzelnen Werte der Unbekannten noch einfacher bestimmt werden können. Allerdings gibt es ja noch immer viel Arbeit. Wir können zwar den Wert der letzten Unbekannten sofort ablesen, aber um die Werte der restlichen Variablen zu ermitteln, muss einiges an Einsetzarbeit geleistet werden. Wäre es nicht schön, wir könnten die Werte aller Variablen sofort ablesen? Das lässt sich in der Tat erreichen, wenn man sich mit der normierten Zeilenstufenform nicht zufrieden gibt, sondern daran noch etwas weiter arbeitet. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel. Wir haben ein bestimmtes 3×3 -LGS erst als erweiterte Koeffizienten-Matrix dargestellt und diese dann in die normierte Zeilenstufenform gebracht:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Niemand hält uns ab, die Operationen, die die Lösungsmenge nicht verändern, weiter anzuwenden, bis eine Situation erreicht ist, die noch viel vorteilhafter ist. Wen wir es nämlich schaffen, eine Matrix der folgenden Art zu erreichen, dann sind die Werte *aller* Variablen sofort und ohne weitere Rechnung ablesbar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star \end{bmatrix}.$$

Wir müssen dazu einfach weitere Nullen erzeugen, dies aber so geschickt, dass wir einmal erreichte Nullen nicht wieder opfern müssen. Im obigen Beispiel sähe das etwa so aus:

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wir können III benutzen, um die 3 der zweiten Zeile in eine 0 zu verwandeln. Da III vorne Nullen hat, kann die Null in II nicht mehr zerstört werden. Wir multiplizieren also in Gedanken III mit -3 und addieren das Ergebnis zu II. Das liefert:

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nun benutzen wir III erneut, um in I eine Null hinzubekommen. Wir multiplizieren dazu III in Gedanken mit -1 und addieren das Resultat zu I. Das ergibt:

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Schliesslich addieren wir direkt II zu I, um die letzte gewünschte Null hinzubekommen. Wir erhalten:

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Geschafft! Diese Matrix sieht nun, zurück übersetzt in Gleichungen, so aus:

$$\begin{array}{r|ccccccc} \mathrm{I} & 1\cdot x & + & 0\cdot y & + & 0\cdot z & = & 1 \\ \mathrm{II} & 0\cdot x & + & 1\cdot y & + & 0\cdot z & = & -2 \\ \mathrm{III} & 0\cdot x & + & 0\cdot y & + & 1\cdot z & = & 3 \end{array}.$$

Daraus sind die Werte aller Unbekannten direkt ablesbar. Diese überaus glückliche Form heisst *reduzierte Zeilenstufenform*, auf Englisch: *reduced row echelon form*, kurz: *rref*. Wenn es also gelingt, ein LGS in die reduzierte Zeilenstufenform zu bringen, dann ist es gelöst. Mit etwas Übung lässt sich diese Methode mit relativ wenig Schreibarbeit umsetzen, weil man einige Schritte aufs Mal und in derselben Matrix ausführen kann, ohne immer wieder alle Zeilen abzuschreiben. Die Methode ist effizient, und es ist relativ leicht, sie so in einen Algorithmus umzuarbeiten, dass sie maschinell bearbeitet werden kann. Kein Wunder also, dass moderne Taschenrechner und Mathematik-Softwarepakete Funktionen anbieten, die eine beliebige erweiterte KoeffizientenMatrix auf Knopfdruck in rref überführen.

Merke:

Im Normalfall kann man die Matrix durch geeignete Multiplikationen in die **normierte Zeilenstufenform** bringen:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & d_3 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n \end{bmatrix}.$$

Wendet man nun die Operationen, die die Lösungsmenge des Systems unverändert lassen, weiter an, so kann man sogar die Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \star \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \star \end{bmatrix}$$

erreichen. Sie heisst **reduzierte Zeilenstufenform (rref)**, und in ihr sind die Werte aller Variablen sofort ablesbar.

Entartete Treppen und Anzahl Lösungen

Wir haben in den letzten Abschnitten immer wieder die etwas vage Floskel „im Normalfall“ bemühen müssen. Dies einfach deshalb, weil nur reguläre Systeme auf diese schönen, regelmässigen Treppen mit stets gleich grossen

Stufen führen. Singuläre Systeme besitzen ja entweder gar keine Lösung oder aber unendlich viele Lösungen, und es ist klar, dass sich das irgendwie in der Treppenform zeigen muss. Die gute Nachricht ist: Egal, ob ein LGS singulär der regulär ist, indem man die Treppenform herstellt, zeigt sich in aller Deutlichkeit, welche Situation genau vorliegt. Man kann der Treppe immer ansehen, ob das LGS regulär oder singulär ist, und wenn es singulär ist, kann man der Treppenform ansehen, wie die Lösungsmenge genau beschaffen ist. Das ist ein weiterer schöner Vorteil der Gausselimination. Betrachten wir nun Beispiele, die die möglichen Fälle aufzeigen. Angenommen, wir sollen das folgende LGS lösen:

$$\begin{array}{r|rcl} \text{I} & x - y + 3z & = & 1 \\ \text{II} & x + 2z & = & 2 \\ \text{III} & -y + z & = & 0. \end{array}$$

Wir stellen es sofort als erweiterte Koeffizienten-Matrix dar, wobei wir gleich die Treppenstufen andeuten, unter denen wir ausschliesslich Nullen haben möchten.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Offenbar können wir die Treppenform in nur zwei Schritten erreichen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{I zu}\\ (-1)\cdot\text{II add.}}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{II zu}\\ (-1)\cdot\text{III add.}}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Es ist eine *entartete Treppe* entstanden. Allein dies zeigt schon, dass wir es nicht mit dem Normalfall zu tun haben. Übersetzen wir die Matrix wieder in Gleichungen, so wird deutlich, welche Situation vorliegt. Die dritte Gleichung lautet nämlich nun so:

$$\begin{aligned} & 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = -1. \end{aligned}$$

Diese Aussageform ist nicht erfüllbar; es gibt also kein 3-Tupel, welches die Gleichung löst. Und da das ursprüngliche System dieselbe Lösungsmenge hat wie das umgeformte, können wir sicher sein, dass auch das anfängliche LGS singulär ist und eine leere Lösungsmenge besitzt. Die Treppenform zeigt uns dies in aller Deutlichkeit:

$$L = \{\}.$$

Betrachten wir ein zweites Beispiel. Wiederum deuten wir die Treppenstufen an, unter denen wir gerne Nullen hätten:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wenige Schritte führen auf die Treppenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{und} \\ \text{I zu} \\ (-1)\cdot\text{III add.}}]{\substack{\text{I zu} \\ \text{II add.}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{und} \\ \text{II zu} \\ (-0.5)\cdot\text{IV add.}}]{\substack{\text{II zu} \\ \text{III add.}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{III zu} \\ (-2)\cdot\text{IV add.}}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wieder eine entartete Treppe! Offenbar erhalten wir eine ganze Nullzeile. Als Gleichung interpretiert hat diese natürlich unendlich viele Lösungen, denn

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$$

wird von jedem beliebigen 4-Tupel erfüllt. Die vierte Zeile liefert somit keine brauchbare Information. Das LGS ist *unterbestimmt* und besteht bloss noch aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_3 - x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Da es unterbestimmt ist, dürfen wir eine Variable frei wählen. Wir setzen zum Beispiel $x_4 = t \in \mathbb{R}$ und drücken alle restlichen Variablen durch t aus. Eine kleine Rechnung ergibt die folgende Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \left(\frac{t+4}{2}, \frac{8-t}{4}, \frac{t+4}{4}, t \right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das ursprüngliche System ist also singulär und besitzt unendlich viele Lösungen. Und die Treppenform zeigt uns dies durch die Nullzeile deutlich an. Auch in diesem Beispiel sehen wir, dass die Gausselimination klar anzeigt, was für eine Situation vorliegt. Der geringe Schreibaufwand, die einfache Automatisierbarkeit und die völlige Transparenz in Bezug auf die Anzahl Lösungen sind gute Gründe dafür, die Gausselimination fleissig zu benutzen.

Merke:

Führt die Herstellung der Treppenform auf eine Zeile der Art

$$0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad c$$

mit $c \neq 0$, so bedeutet dies, dass das System keine Lösung besitzt. Es ist also singulär mit leerer Lösungsmenge.

Entsteht bei einem quadratischen System eine ganze Nullzeile, so ist das System unterbestimmt und ist in der Regel singulär mit unendlich vielen Lösungen.

Wie schnell ist die Gausselimination?

Zum Schluss fragen wir uns, wie aufwändig diese Methode eigentlich ist. Wie viele einzelne Rechenschritte sind nötig, bis die Treppenform erreicht ist? Wir denken dabei natürlich an Computer, weil es sich anbietet, Gausselimination von einer Software ausführen zu lassen. Da für einen Computer eine Multiplikation (beziehungsweise Division) viel aufwändiger ist als eine Addition oder Subtraktion, ist es ausreichend, wenn wir nur die anfallenden Multiplikationen zählen.

Angenommen, wir starten mit einem $n \times n$ -LGS:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & \cdots & \star \end{array}\right]$$

Die Sterne stehen einfach für irgendwelche Zahlen, und die hintersten Sterne haben wir abgetrennt, weil sie ja für die Konstanten rechts vom Gleichheitszeichen stehen. Im ersten Schritt (nach allfälligem Vertauschen von zwei Gleichungen) müssen wir dafür sorgen, dass das Pivot der 1. Zeile eine 1 ist. Danach können wir die erste Zeile immer zu einem geeigneten Vielfachen jeder anderen Zeile addieren, um Nullen im Rest der ersten Spalte zu erzwingen:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \star & \star & \star & \cdots & \star \end{array}\right]$$

Um diese Situation zu erreichen, müssen wir eigentlich an jeder der mit „$\star$" bezeichneten Stelle eine Multiplikation (respektive Division) ausführen. Das macht insgesamt n^2 Multiplikationen. Danach können wir die erste Zeile und erste Spalte vergessen und in analoger Weise mit der Restmatrix weiterarbeiten. Wir gelangen nach einem weiteren Durchgang zu der folgenden Situation:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 1 & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \star & \star & \cdots & \star \end{array}\right]$$

Dazu sind offenbar $(n-1)^2$ einzelne Multiplikationen nötig. So fortfahrend wird die Untermatrix, in der wir arbeiten müssen, schrittweise immer kleiner, bis in der letzten Zeile bloss noch eine einzige Multiplikation ausgeführt werden muss. Im Total fallen also so viele Multiplikationen an:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2.$$

Ob das schnell ist oder nicht, ist nicht leicht zu erkennen. Bei $n = 10$ liefert dieser Term die Zahl 385. Für einen Menschen mag das ganz schön anstrengend (und langweilig) sein, für einen Computer sind 385 Operationen nichts, das erledigt er in weniger als einer Sekunde. In der Praxis kommen sehr grosse lineare Gleichungssysteme vor, manchmal mit Tausenden von Gleichungen und Unbekannten. Angenommen, $n = 1000$. Dann fallen gemäss obigem Term

$$333'833'500$$

einzelne Operationen an. Für einen Menschen wäre das nun ganz und gar unmöglich, für einen schnellen Computer, der bis zu 10^{10} Operationen pro Sekunde leisten kann, wäre diese Herausforderung noch immer schnell zu meistern. Bei einem gigantischen LGS mit $n = 1'000'000$ wird es aber kritisch. Dann liefert obige Formel nämlich die Zahl

$$3.333\ldots \cdot 10^{17}.$$

Bei einer angenommenen Leistung von 10^{10} Operationen pro Sekunde, ergäbe das eine Rechendauer von über einem Jahr! Glücklicherweise sind Systeme dieser Grössenordnung, die in der Praxis tatsächlich auftauchen (z.B. in der Computertomographie) in einer speziellen Form, so dass andere und viel schnellere Methoden verwendet werden können.

Dennoch macht diese Überlegung eindrücklich klar, dass wir bei Lösungsverfahren mathematischer Probleme immer viel Wert darauf legen müssen, dass die Verfahren in vernünftiger Zeit und mit vernünftigem Rechenaufwand ablaufen. Es nützt nichts, ein Verfahren zu haben, das theoretisch die Lösung findet, aber dann an dem schieren Aufwand scheitert.