Zahlen

[Grundlagen]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 Armin P. Barth

Natürliche Zahlen

Unser Sonnensystem hat 8 Planeten. Das Osmium-Atom besitzt 76 Protonen im Atomkern. Der Mensch hat maximal 300000 Haare auf dem Kopf. Es besteht kein Zweifel: Seit Tausenden von Jahren benutzt der Mensch Zahlen zum Zählen gleichartiger Objekte. Wir alle wachsen auf mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ..., sie sind aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken, und es ist nicht erstaunlich, dass verschiedene Kulturen für solche Zahlen verschiedene Zeichen entwickelt haben.

Die Erfindung der Zahl 0 (Null) ist dagegen eine Sensation. Es ist ja nicht selbstverständlich, für das Nicht-Vorhandensein eines Objekts eines bestimmten Typs ein Zahlzeichen einzuführen, aber es hat das Rechnen und die Mathematik ganz wesentlich gefördert. Vermutlich zwischen 300 v. Chr. und 600 n. Chr. wurde die Null in Indien im Zusammenhang mit der Entwicklung des Stellenwertsystems erfunden. Jedenfalls findet man in Inschriften seit dem 7. Jahrhundert einen Punkt oder einen Kreis als Symbol für die „Leere“ (śūnya), wie in Indien die Null genannt wurde.

In der Mathematik werden die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ *natürliche* Zahlen genannt, und es hat sich für die (unendlich grosse) Menge all dieser ein eigenes Symbol durchgesetzt:

Definition:
Die Menge

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

ist die Menge der ***natürlichen Zahlen****.*

Diese Symbolik ist allerdings nicht ganz einheitlich. So gibt es auch Autoren, die die Bezeichnung $\mathbb{N}$ nur für die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ verwenden und $\mathbb{N}_0$ schreiben, wenn sie die Null auch dabei haben wollen. Wir verwenden hier aber die eingerahmte Definition, die sich auch auf das 1889 vom italienischen Mathematiker Giuseppe Peano formulierte Axiomensystem für die natürlichen Zahlen stützt. Und wir schreiben $\mathbb{N}^+$ oder $\mathbb{N}_{>0}$, wenn wir nur die positiven ganzen Zahlen, also die natürlichen Zahlen ab 1 meinen.

Es ist klar, dass die natürlichen Zahlen das perfekte Instrument zum Zählen sind, dass sie aber sehr bald nicht mehr ausreichen, wenn man etwa Gleichungen lösen will. Die Gleichung

$$x + 2 = 1$$

etwa hat in der Menge der natürlichen Zahlen offenbar keine Lösung. Strebt man im Hinblick auf das Lösen von Gleichungen eine möglichst luxuriöse Situation an, so macht es darum Sinn, eine Erweiterung des Zahlbereichs vorzunehmen.

Ganze Zahlen

Im Alltag wird die Notwendigkeit, negative Zahlen einzuführen, sehr schnell deutlich. Will man eine Schuld im Gegensatz zu einem Guthaben angeben oder eine Temperatur unterhalb 0°C nennen, will man ein Untergeschoss bezeichnen oder eine Tiefe unter dem Meeresspiegel, so greift man gerne und mit Vorteil zu den negativen Zahlen. In der Mathematik kann man die negativen Zahlen als die additiven Inversen zu den positiven natürlichen Zahlen auffassen. Ist nämlich n irgendeine Zahl aus $\mathbb{N}_{>0}$, so ist ja dann $-n$ diejenige Zahl, die, zu n addiert, auf Null führt und eben darum das additive Inverse von n:

$$n + (-n) = 0.$$

Erweitert man die Menge der natürlichen Zahlen um die additiven Inversen der positiven natürlichen Zahlen, so gelangt man zu der Menge $\mathbb{Z}$ der *ganzen Zahlen*.

Definition:
Die Menge

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

ist die Menge der ***ganzen Zahlen****.*

Diese Zahlmenge ist nun abgeschlossen unter den Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation, das heisst, es ist unmöglich, bei alleiniger Anwendung solcher Operationen aus der Menge $\mathbb{Z}$ heraus zu gelangen.

Im Zusammenhang mit der Zahlmenge $\mathbb{Z}$ haben sich die folgenden Fachbegriffe als nützlich erwiesen:

Nützliche Fachbegriffe

positive ganze Zahlen für die Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$

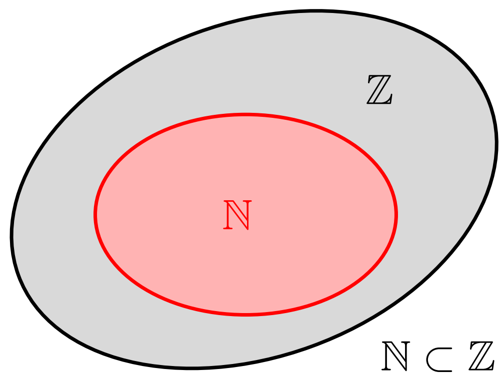
nicht-negative ganze Zahlen für die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

negative ganze Zahlen für die Zahlen $\ldots, -4, -3, -2, -1$

nicht-positive ganze Zahlen für die Zahlen $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0$.

Die Null selbst ist weder positiv noch negativ.

Natürlich ist $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$, was sich graphisch etwa so visualisieren lässt:



Wenn man ans Lösen von Gleichungen denkt, dann wird schnell klar, dass die ganzen Zahlen schnell nicht mehr ausreichen, um ganz einfache Gleichungen zu lösen. Zum Beispiel kann die Gleichung

$$7x - 3 = 0$$

nur gelöst werden, wenn man rationale Zahlen zulässt. Es drängt sich darum auf, eine zusätzliche Erweiterung des Zahlbereichs vorzunehmen.

Rationale Zahlen

Will man Bruchteile von einem Ganzen ausdrücken, so braucht man rationale Zahlen. Auch dieses Konzept ist sehr alt; so fand man etwa im Papyrus Moskau und im Papyrus Rhind - zwei ägyptischen Papyri aus der Zeit zwischen 2000 und 1800 v. Chr. - bereits Stammbrüche, also Brüche mit Zähler 1. Zudem gab es dort ein Sonderzeichen für den offenbar häufig verwendeten Bruchteil 2/3. Heute versteht man in der Mathematik unter einer *rationalen Zahl* jeden Bruch, bei dem sowohl der Zähler, als auch der Nenner eine ganze Zahl ist, der Nenner freilich ungleich 0.

> **Definition:**
> *Die Menge*
>
> $$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$
>
> *bezeichnet die Menge der **rationalen Zahlen**.*

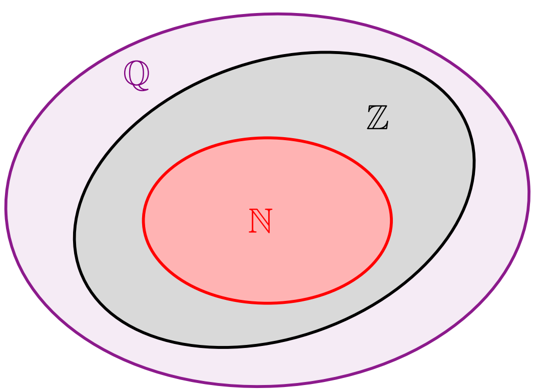
Damit fängt man alle Zahlen der Art

$$\frac{1}{2}, \frac{7}{11}, -\frac{1}{3}, \frac{117}{119}, -\frac{28}{5}, \frac{12}{4}, \ldots$$

ein. Und da sich - wenn auch nicht eindeutig - jede ganze Zahl als rationale Zahl schreiben lässt, etwa

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \ldots,$$

ist die Menge $\mathbb{Z}$ sicherlich in der Menge $\mathbb{Q}$ enthalten:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Sobald man rationale Zahlen eingeführt hat, muss man die Vorstellung darüber, wie Zahlen auf der Zahlgeraden angeordnet sind, ganz wesentlich ergänzen. Ganze Zahlen kann man sich ja noch wie Perlen vorstellen, die an einer Schnur aufgereiht sind; es ist bei jeder Zahl klar, welches die nächste sein wird, und es gibt zum Beispiel genau eine kleinste positive ganze Zahl. Sobald man rationale Zahlen zulässt, stimmt das nicht mehr. Die Frage, welches die nächstgrössere rationale Zahl nach 13 sei, lässt sich nicht beantworten, und es gibt auch nicht so etwas wie die kleinste positive rationale Zahl.

Die folgende Überlegung hilft, das besser zu verstehen. Angenommen, wir betrachten zwei rationale Zahlen, von denen die eine kleiner ist als die andere:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ b \neq 0, d \neq 0).$$

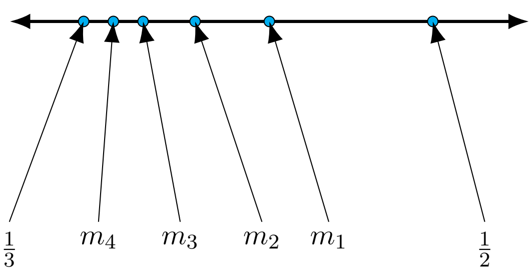
Nun lässt sich ganz sicher eine weitere rationale Zahl finden, die sich zwischen diesen beiden Zahlen befindet, ganz egal, wie nah die beiden Zahlen möglicherweise sind. Dazu bilden wir einfach das arithmetische Mittel beider Zahlen:

$$\begin{aligned} m :&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \\ &= \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2 \cdot b \cdot d}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{Z}$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist, sind der Zähler und der Nenner von m sicherlich wieder ganzzahlig, und der Nenner ist ungleich 0, weil b und d ungleich 0 sind. Folglich ist auch m eine rationale Zahl, und sie befindet sich auf der Zahlgeraden in der Mitte zwischen den beiden anfänglich gewählten Zahlen. Wenn wir anfänglich zwei konkrete rationale Zahlen wählen, etwa

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2},$$

so können wir mit dem beschriebenen Verfahren eine weitere rationale Zahl m_1 erzeugen, die dazwischen liegt. Aber dann lässt sich das Verfahren natürlich fortsetzen. Mit demselben Verfahren können wir eine neue rationale Zahl m_2 zwischen $1/3$ und m_1 erzeugen, dann eine weitere rationale Zahl m_3 zwischen $1/3$ und m_2, und so weiter.



Auf beliebig engem Raum lassen sich also unendlich viele rationale Zahlen unterbringen. Und wenn jemand behauptet, die kleinste rationale Zahl, die grösser als $1/3$ ist, zu kennen, so können wir die Behauptung einfach mit dem Hinweis auf dieses Verfahren widerlegen. Es gibt nach $1/3$ keine „nächstgrössere rationale Zahl".

Mathematikerinnen und Mathematiker formulieren das so: Die rationalen Zahlen *liegen dicht* auf der Zahlgeraden. Damit will man sagen, dass jeder Punkt auf der Zahlgeraden beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden kann. In beliebig naher Umgebung jedes Punktes befinden sich unendlich viele rationale Zahlen.

Freilich müssen wir aufpassen, dass wir jetzt nicht sagen, jeder Punkt auf der Zahlgeraden lasse sich durch eine rationale Zahl darstellen. Das wäre nämlich falsch. Es gibt in der Tat unendlich viele Punkte auf der Zahlgeraden, die nicht einer rationalen Zahl entsprechen. Dazu werden wir nachher mehr sagen.

Wir wollen lieber noch etwas bei den rationalen Zahlen verweilen, weil sie noch mehr Interessantes zu bieten haben. Zum Beispiel lässt sich jeder rationalen Zahl eine *Dezimalbruchdarstellung* zuordnen. Beispiele:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= 0.5,\\
\frac{1}{3} &= 0.3333333\ldots = 0.\bar{3},\\
\frac{1}{8} &= 0.125,\\
\frac{33}{7} &= 4.714285714285714285\ldots = 4.\overline{714285}.
\end{aligned}$$

Die Dezimalbruchdarstellung findet man, indem man den Zähler durch den Nenner handschriftlich dividiert. Für das dritte Beispiel sieht das so aus:

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 1 & & & 8 \\ \cline{5-5}
- & \underline{0} & & & 0.1\;2\;5 \\
 & 1 & 0 & & \\
- & & \underline{8} & & \\
 & & 2 & 0 & \\
 & - & \underline{1} & \underline{6} & \\
 & & 4 & 0 & \\
 & - & \underline{4} & \underline{0} & \\
 & & 0 & 0 &
\end{array}$$

In all diesen Beispielen ist es so, dass die Dezimalbruchentwicklung periodisch wird oder abbricht - wobei man einen Abbruch natürlich auch als eine Periode auffassen kann, indem man sich hinten einfach unendlich viele Nullen denkt. Ist das immer so? Ist die Dezimalbruchentwicklung jeder rationalen Zahl abbrechend oder periodisch?

In der Tat trifft das zu, und man versteht das viel besser, wenn man genau untersucht, was bei der schriftlichen Division des Zählers durch den Nenner eigentlich geschieht. Stellen wir uns also vor, wir möchten die Dezimalbruchentwicklung der rationalen Zahl a/b gewinnen, wobei $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}_{>0}$ ist. Bei der fortlaufenden Division entstehen Reste $r_1, r_2, \ldots$:

$$\begin{array}{rcccc|l}
 & a & & & & b \\ \cline{6-6}
- & \underline{c_1} & & & & a/b \\
 & r_1 & 0 & & & \\
- & \multicolumn{2}{r}{\underline{\quad c_2}} & & & \\
 & & r_2 & 0 & & \\
 & - & \multicolumn{2}{r}{\underline{\quad c_3}} & & \\
 & & & r_3 & 0 & \\
 & & & & \ldots &
\end{array}$$

Was wissen wir über diese Reste mit absoluter Sicherheit? Da es Reste sind, die bei Division durch die natürliche Zahl b anfallen, sind sie sicherlich alle kleiner als b. Noch genauer: Bei einer Division durch die positive natürliche Zahl b kommen als Reste nur die folgenden Zahlen in Frage: $0, 1, 2, \ldots, b-1$. Das sind genau b mögliche Reste; der Vorrat an Resten ist also nicht unerschöpflich. Es muss bei der schriftlichen Division damit Folgendes passieren: Entweder kommt einmal der Rest 0, dann bricht die Dezimalbruchentwicklung ab. Oder aber es kommt nie der Rest 0; dann muss sich aber nach spätestens $b-1$ Schritten ein schon früher vorgekommener Rest wiederholen, und damit stellt sich dann eine Periode ein.

Sucht man die Dezimalbruchentwicklung der Zahl $1/8$, so fallen fortlaufend Divisionen durch 8 an. Dabei kommen als Reste einzig die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 7$ in Frage. Tatsächlich kommen der Reihe nach die folgenden Reste: $1, 2, 4, 0$. Da als vierter Rest die 0 kommt, bricht die Dezimalbruchentwicklung ab, beziehungsweise geht über in eine unendliche Folge von Nullen.

$$\begin{array}{rcccc|l}
 & 1 & & & & 8 \\ \cline{6-6}
- & \underline{0} & & & & 0.1\,2\,5 \\
 & 1 & 0 & & & \\
- & & \underline{8} & & & \\
 & & 2 & 0 & & \\
 & - & 1 & \underline{6} & & \\
 & & & 4 & 0 & \\
 & & - & 4 & \underline{0} & \\
 & & & 0 & 0 &
\end{array}$$

Sucht man die Dezimalbruchentwicklung der Zahl $3/7$, so fallen fortlaufend Divisionen durch 7 an. Dabei kommen als Reste einzig die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 6$ in Frage. Tatsächlich sind die ersten sechs auftretenden Reste die folgenden: $3, 2, 6, 4, 5, 1$. Damit sind ausser der 0 alle möglichen Reste aufgebraucht; der nächste Rest muss also entweder die 0 sein oder ein bereits früher aufgetretener Rest. Tatsächlich ist es die 3. Und somit wiederholen sich die Reste $3, 2, 6, 4, 5, 1$ bis in alle Ewigkeit. Es stellt sich eine Periode ein.

$$\begin{array}{rccccccc|l}
 & 3 & & & & & & & 7 \\ \cline{9-9}
- & \underline{0} & & & & & & & 0.4\,2\,8\,5\,7\,1 \\
 & 3 & 0 & & & & & & \\
- & 2 & \underline{8} & & & & & & \\
 & & 2 & 0 & & & & & \\
 & - & 1 & \underline{4} & & & & & \\
 & & & 6 & 0 & & & & \\
 & & - & 5 & \underline{6} & & & & \\
 & & & & 4 & 0 & & & \\
 & & & - & 3 & \underline{5} & & & \\
 & & & & & 5 & 0 & & \\
 & & & & - & 4 & \underline{9} & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & \\
 & & & & & - & & \underline{7} & \\
 & & & & & & & 3 &
\end{array}$$

Also $3/7 = 0.\overline{428571}$. Nun sehen wir sehr klar, womit wir es bei den rationalen Zahlen zu tun haben. Sie bilden eine Obermenge der Menge der ganzen Zahlen. Es sind sämtliche Zahlen, die eine abbrechende oder periodische Dezimalbruchentwicklung haben, und sie liegen dicht auf der Zahlgeraden. Ist die Zahlgerade damit voll oder weist sie noch Lücken auf?

Eine löchrige Gerade

Eins ist ganz klar: Es gibt unendlich viele rationale Zahlen, und es wird nicht möglich sein, auf der Zahlgeraden irgendein Intervall zu finden, in dem sich keine einzige rationale Zahl befindet. Angenommen, jemand behauptet, dass zwischen 1.375 und 1.376 keine einzige rationale Zahl zu finden ist. Das könnten wir nun leicht widerlegen. Beide genannten Zahlen lassen sich ja als rationale Zahlen schreiben:

$$x := \frac{1375}{1000} = 1.375$$

und

$$y := \frac{1376}{1000} = 1.376$$

Und wie wir oben erkannt haben, lassen sich zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen immer unendlich viele weitere rationale Zahlen finden, eine zum Beispiel, indem man das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{2}(x + y)$$

berechnet. Die rationalen Zahlen liegen ja dicht auf der Zahlgeraden; somit können wir nicht davon ausgehen, dass nun noch ganze Abschnitte auf der Zahlgeraden leer sind. Es kann höchstens „punktförmige Lücken“ geben, also Stellen auf der Zahlgeraden, denen nicht eine rationale Zahl zugeordnet werden kann. Gibt es solche? Und wie viele gibt es?

In der Tat ist die Zahlgerade mit den rationalen Zahlen noch immer „löchrig“, und es braucht nicht-rationale Zahlen, um diese Löcher zu stopfen. Das ist umso erstaunlicher, als ja zwischen zwei ungleichen rationalen Zahlen unendlich viele weitere rationale Zahlen sind; aber trotzdem ist zwischen den rationalen Zahlen noch immer viel Platz. Offenbar ist es nicht einfach, eine wirklich realistische Vorstellung vom Aufbau der Zahlgeraden zu gewinnen.

Eine wirklich überzeugende Antwort auf die Frage, ob es nebst den rationalen Zahlen noch weitere gibt, ergibt sich aus der Tatsache, dass die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl stets abbrechend oder periodisch ist, wie oben gezeigt. Das bedeutet ja auch, dass es weitere Zahlen geben muss, nämlich solche, die eine nicht-abbrechende und nicht-periodische Dezimalbruchentwicklung haben. Sind solche Zahlen exotische Einzelfälle? Und wie können wir zu konkreten Beispielen kommen?

Nun, offenbar können wir den Bauplan einiger solcher Zahlen leicht angeben; wir müssen ja nur dafür sorgen, dass die Nachkommastellen nie aufhören und keinerlei periodisches Muster annehmen. Zum Beispiel ist

$$0.1011011101111011111011111101\ldots$$

sicher nicht rational, jedenfalls wenn wir fordern, dass das Muster ohne Ende so weitergehen soll. In ähnlicher Weise können wir sofort weitere nicht-rationale Zahlen erzeugen:

$$0.1234567891011121314151617181920\ldots$$
$$0.5050050005000050000050000005000\ldots$$
$$0.1020304050607080901001101201301\text{4}\ldots$$
$$0.1311331113331111333311111333331\text{1}\ldots$$

usw.

Offenbar muss es unendlich viele nichtrationale Zahlen geben, denn es gibt sicher nicht nur endlich viele Möglichkeiten, solche Muster wie oben zu erzeugen. Trotz unendlich vieler rationaler Zahlen gibt es auf der Zahlgeraden also Platz für unendlich viele weitere Zahlen. Bei all diesen Zahlen können wir sicher sein, dass sie nie und nimmer als Bruch mit ganzzahligem Zähler und ganzzahligem Nenner geschrieben werden können, denn wäre das möglich, so müsste die Dezimalbruchentwicklung ja abbrechend oder periodisch sein. Es wird aber auch klar, dass wir nie in der Lage sein werden, eine nicht-rationale Zahl exakt anzugeben. Auch Taschenrechner und Computer können das nicht. Jede Darstellung einer Zahl, sei das nun auf Papier oder Bit für Bit in einem elektronischen Speicher, muss nach endlich vielen Informationseinheiten abbrechen. Wir sehen also, dass es unendlich viele nicht-rationale Zahlen geben, und gleichzeitig, dass der rechnerische Umgang mit ihnen besonders heikel sein muss.

Irrationale Zahlen und reelle Zahlen

Zahlen, die nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können, heissen *irrational*.

Merke:

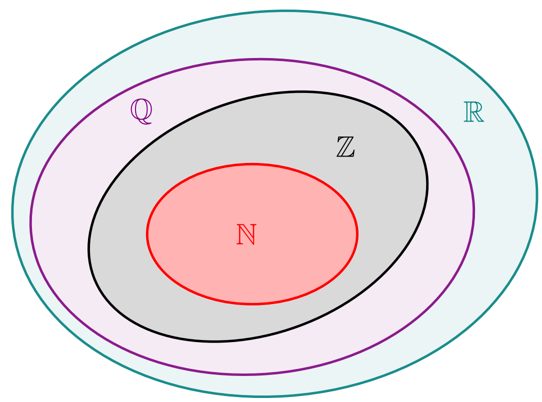
Eine Zahl auf der Zahlgeraden, die nicht in der Form p/q mit $p, q \in \mathbb{Z}$ (und $q \neq 0$) geschrieben werden kann, heisst **irrationale Zahl**.

Es gibt unendlich viele irrationale Zahlen. Die Dezimaldarstellung einer irrationalen Zahl ist nicht-abbrechend und nicht-periodisch.

Es lässt sich zeigen, dass durch Hinzunahme der irrationalen Zahlen zu den rationalen die Zahlgerade keinerlei „Löcher“ mehr aufweist. Sie ist also voll; jeder Stelle auf der Zahlgeraden lässt sich genau eine rationale oder irrationale Zahl zuordnen. Es ist darum sinnvoll, für die Gesamtheit all dieser Zahlen einen eigenen Namen einzuführen:

Definition:
Alle rationalen und irrationalen Zahlen zusammen werden ***reelle Zahlen*** *genannt. Das Symbol für die Menge aller reellen Zahlen ist* $\mathbb{R}$.

Da $\mathbb{Q}$ insbesondere eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, können wir unsere „Mengen-Matrjoschka“ wie folgt ausbauen:



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Nicht-triviale Beispiele und ein Beweis

Wenn irrationale Zahlen diskutiert werden, hört man oft, die Kreiszahl π sei eine solche oder auch $\sqrt{2}$. Allerdings ist das eben nicht trivial. Um das einzusehen, können wir ja nicht einfach die Nachkommastellen anschauen und feststellen, dass sie nicht-abbrechend und nicht-periodisch sind. Wenn man sich etwa die Nachkommastellen von $\sqrt{2}$ anschaut:

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727350138462309122970249248360558507372126441214970999358314132226659275055927557999505011527820605714701095599716059702745345968620147285174186408891986095523292304843087143214508397626036279952514079896872533965463318088296406206152583523950547457502877599617298355752203375318570113543746034084988471603868999706990048150305440277903164542478230684929369186215805784631115966687130130156185689872372352885092648612494977154218334204285686060146824720771435854874155657069677653720226485447015858801620758474922657226002085584466521458398893944370926591800311388246468157082630100594858704003186480342194897278290641045072636881313739855256117322040245091227700226941127573627280495738108967504018368 ...

So kann man ja nie ganz sicher sein, ob sich irgendwann doch noch eine Periode einstellen oder ob die Entwicklung gar abbrechen wird. Es könnte ja sein, dass diese Zahl als Bruch von irrsinnig grossen ganzen Zahlen geschrieben werden kann, so dass es Tausende von möglichen Resten gibt und die Periode erst nach Tausenden von Stellen sichtbar wird. Dass das nicht so ist, dass die Zahl $\sqrt{2}$ in der Tat irrational ist, ist nicht klar und bedarf eines strengen Beweises:

> **Satz:**
> $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Vor dem Beweis ist allerdings ein wenig Vorarbeit nötig:

Jede natürliche Zahl > 1 kann man in eindeutiger Weise in Primfaktoren zerlegen. Was bedeutet das genau? Primzahlen sind natürliche Zahlen mit genau zwei Teilern; sie gehen also nur bei Division durch 1 und durch sich selber restlos auf. Die ersten paar Primzahlen sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$. Betrachten wir etwa die Zahl 60, so kann man sie wie folgt in ihre Primfaktoren zerlegen:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Und bei der Zahl 8775 sähe das so aus:

$$8775 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13.$$

Dass diese Zerlegung eindeutig ist, ist schnell klar, wenn man darüber nachdenkt, wie man sie erzeugt: Man beginnt mit der kleinsten Primzahl, also 2, und teilt so oft durch sie wie möglich; dann geht man weiter zu der nächstgrösseren Primzahl und teilt durch sie so oft wie möglich, und so fort. Dass dabei nicht verschiedene Zerlegungen bei ein und derselben Zahl entstehen können, ist klar, auch wenn das natürlich kein strenger Beweis für die Eindeutigkeit ist. Wenn also jemand sagt, eine Zahl habe die Primfaktorzerlegung $2^3 \cdot 7 \cdot 11^2$, so können wir sicher sein, dass es nicht möglich ist, diese Zahl durch eine ganz andere Primfaktorzerlegung darzustellen.

Auch das Folgende leuchtet schnell ein: Sei n irgendeine natürliche Zahl und p ein Primfaktor in der Primfaktorzerlegung von n. Ganz egal, wie oft p in der Primfaktorzerlegung von n vorkommt, wir können sicher sein, dass in der Primfaktorzerlegung von n^2 der Faktor p in gerader Anzahl vorkommen wird. Betrachten wir ein Beispiel:

$$n = 2^2 \cdot 7 \cdot 11^3.$$

In n kommt der Primfaktor 2 in gerader, der Primfaktor 7 in ungerader und der Primfaktor 11 ebenfalls in ungerader Anzahl vor; alle anderen Primfaktoren kommen gar nicht vor. Wenn wir die Zahl quadrieren, so geschieht Folgendes:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2^2 \cdot 7 \cdot 11^3)^2 \\ &= (2^2 \cdot 7 \cdot 11^3) \cdot (2^2 \cdot 7 \cdot 11^3) \\ &= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 11^3 \\ &= 2^4 \cdot 7^2 \cdot 11^6. \end{aligned}$$

Nun kommt also jeder Primfaktor in gerader Anzahl vor, einerlei, ob er vorher in gerader oder ungerader Anzahl aufgetreten ist. Das hat einfach nur damit zu tun, dass bei der Quadrierung die Anzahl jedes Primfaktors verdoppelt wird. Allgemeiner: Ist

$$n = \ldots \cdot p^k \cdot \ldots$$

für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl k, so ist

$$n^2 = \ldots \cdot p^{2k} \cdot \ldots$$

Wir können also sicher sein, dass in einer Quadratzahl jeder Primfaktor entweder gar nicht oder aber in gerader Anzahl vorkommt.

Nach dieser kleinen Vorarbeit ist der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ nun besonders einfach:

Beweis. Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann müsste sich die Zahl als Bruch mit ganzzahligem Zähler und Nenner schreiben lassen:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \qquad m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0.$$

Nach Multiplikation mit n und Quadrierung erhielte man dann:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot n &= m, \\ 2 \cdot n^2 &= m^2. \end{aligned}$$

Aber hier sieht man deutlich, dass das unmöglich ist. Aufgrund des Gleichheitszeichens müssten links und rechts dieselben natürlichen Zahlen stehen. Aber das kann nicht sein: Denn in der Zahl rechts kommt der Primfaktor 2 entweder gar nicht oder in gerader Anzahl vor, weil es ja eine Quadratzahl ist. Und in der Zahl links kommt der Primfaktor 2 sicher in ungerader Anzahl vor, nämlich in gerader Anzahl in der Quadratzahl n^2 und dann noch einmal mehr. Folglich können die beiden Zahlen m^2 und $2 \cdot n^2$ unmöglich gleich sein.

Wir sehen also, dass ein Widerspruch entsteht, wenn man annimmt, $\sqrt{2}$ wäre rational. Somit kann diese Zahl unmöglich rational und muss folglich irrational sein. □

Mit ähnlichen Methoden kann man übrigens zeigen, dass die Quadratwurzel jeder natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, irrational sein muss. Allein daraus ergeben sich also bereits unendlich viele irrationale Zahlen: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ldots$

Irrationalitätsbeweise sind oftmals sehr anspruchsvoll, weil es nicht genügt, die ersten paar Nachkommastellen anzuschauen. Auch wenn man Tausende von Stellen untersucht, kann man nie ganz sicher sein, ob sich eine Periode vielleicht erst später einstellen wird oder eben nicht. Vielmehr muss man streng nachweisen, dass es prinzipiell unmöglich ist, die zur Diskussion stehende Zahl in der Form eines Bruches mit ganzzahligem Zähler und Nenner zu schreiben. Und das kann ganz schön anspruchsvoll sein. Zum Beispiel hat Johann Heinrich Lambert 1761 bewiesen, dass die Kreiszahl π ebenfalls irrational ist. 1737 hat Leonhard Euler die Irrationalität der Zahl $e (= 2.7182818284\ldots)$ bewiesen; unmittelbar einsichtig ist das aber beides nicht; die Beweise sind nicht ganz einfach zu verstehen.

Bezüglich Irrationalität gibt es sogar zahlreiche ungelöste Probleme bis zum heutigen Tag. So weiss man etwa nicht, ob die Zahl $\pi + e$ rational oder irrational ist und auch nicht, ob die Zahl $\pi \cdot e$ rational oder irrational ist. (Interessanterweise weiss man aber, dass wenigstens eine dieser beiden Zahlen irrational sein muss; es ist nicht möglich, dass beide rational sind.)

Eine gefährliche Entdeckung?

Die Entdeckung der Irrationalität geht auf Hippasos von Metapont zurück, einen griechischen Mathematiker aus dem Orden der Pythagoreer, der im späten 6. und frühen 5. Jahrhundert vor Christus in Unteritalien lebte. Er hat wahrscheinlich herausgefunden, dass Diagonale und Seite im Quadrat inkommensurabel sind, was bedeutet, dass ihr Längenverhältnis sich nicht als rationale Zahl schreiben lässt. In der Tat beträgt dieses Verhältnis ja gerade $\sqrt{2}$, und darum war Hippasos wohl der erste, der für die Irrationalität dieser Zahl einen Beweis erbrachte. Es ist allerdings nicht verlässlich überliefert, ob er die Irrationalität tatsächlich an diesem Beispiel entdeckt hat und nicht vielleicht im regelmässigen Fünfeck, wo das Längenverhältnis von Diagonale zu Seite ebenfalls irrational ist.

Gemäss einer alten Überlieferung soll Pythagoras über diese Entdeckung sehr erbost gewesen sein, weil sie angeblich das Weltbild der Pythagoreer erschütterte, wonach alles auf der Welt durch ganzzahlige Verhältnisse ausdrückbar sei. Und als dann Hippasos später im Meer ertrank, soll Pythagoras das als göttliche Strafe für diesen Verrat angesehen haben.

Moderne Wissenschaftshistoriker gehen allerdings davon aus, dass das so nicht passiert sein kann. Es ist einfach nicht plausibel, dass ein Forscher wie Pythagoras sich gegenüber einer sensationellen wissenschaftlichen Entdeckung von diesem Kaliber verschlossen hätte. In der Folge hatte sich die griechische Mathematik auch

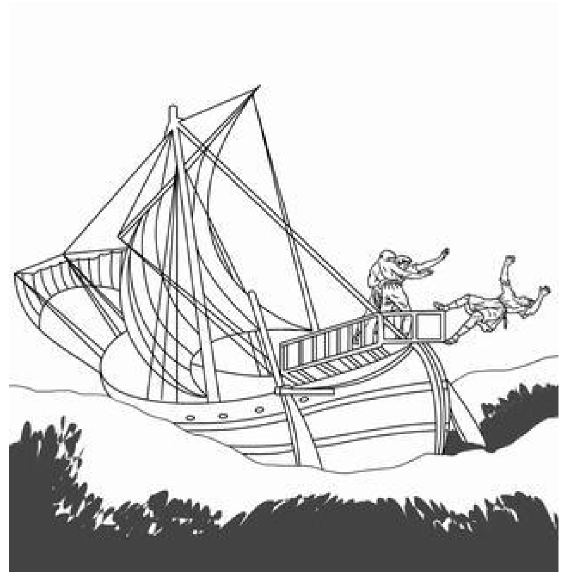


Abbildung 1: Griechische Entdeckung

grundlegend verändert, was dafür spricht, dass die Entdeckung schnell absorbiert worden war. Vielleicht ist diese Überlieferung dadurch entstanden, dass das griechische Wort, welches für „irrational“ (im mathematischen Sinne) verwendet worden war, zudem die Bedeutungen „unsagbar“ und „geheim“ hatte.