Symbole, Terme und Gleichungen

[Grundlagen]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 Armin P. Barth

2 https://en.wikipedia.org/wiki/The_Whetstone_of_Witte

Während sich die Mathematik auf vielfältige Weise charakterisieren lässt, ist eines immerhin klar: Wer ganz am Anfang steht und sich aufmacht, Mathematik zu betreiben, muss unbedingt die Sprache erlernen, in der sich die Mathematik ausdrückt. Dazu gehört, dass man ihre Symbole versteht, versteht, wie aus solchen Symbolen aussagekräftige Terme, Formeln und Gleichungen gebaut werden und wie Berechnungen der so dargestellten Sachverhalte in Gang kommen. Genau davon handelt diese Sequenz...

Symbole

Die Mathematik ist eine universelle formale Sprache, die mit einem umfangreichen Zeichensatz arbeitet. Diese Zeichen oder Symbole müssen messerscharf und eindeutig festgelegt sein. Man stelle sich nur einmal vor, wie verwirrend und wenig hilfreich es wäre, wenn das Symbol „$+$“ nicht ganz präzis definiert wäre, wenn beispielsweise nicht klar wäre, wie es sich vom Symbol „$-$“ unterscheidet. Überdies ist unbedingt erforderlich, dass ein allgemeiner Konsens über die Bedeutung eines Symbols besteht. Es kann nicht sein, dass die einen mit „$3+5$“ etwas ganz anderes ausdrücken wollen als andere.

In der Alltagssprache ist das nicht so. So kann etwa das Zeichen „!“ ganz unterschiedliche Bedeutungen haben:

Es kann nach Ausrufe-, Wunsch- und Aufforderungssätzen stehen, in Österreich ist die Verwendung bei der Anrede in Briefen verbreitet, in Klammern gesetzt kann es anzeigen, dass der Autor das zuvor Geschrieben bemerkenswert findet (!), im Strassenverkehr kann es auf eine Gefahr hinweisen, in der SMS-Sprache kann es, in der Zeichenkette „!-(“, blaues Auge (Veilchen) bedeuten, und so weiter.

Man muss allerdings einräumen, dass der Symbolsatz der Mathematik weder zeitlich noch geographisch völlig starr war und ist. So hat etwa Diophant von Alexandria (um 250 n. Chr.) in seiner „Arithmetik“ eigene Namen und Symbole für Potenzen der Unbekannten bis einschliesslich der sechsten erfunden, weil es vor ihm gar keine solchen Bezeichnungen gab. Aber heute werden seine Symbole nirgends mehr verwendet.

Diophantes Potenzschreibweisen

Δ^γ für Quadrat

$\boldsymbol{K}^\gamma$ für Kubus (3. Potenz)

$\Delta^\gamma\Delta$ für Quadrat des Quadrats (4. Potenz)

$\Delta\boldsymbol{K}^\gamma$ für 5. Potenz

$\boldsymbol{K}^\gamma\boldsymbol{K}$ für 6. Potenz

Und natürlich werden mathematische Sachverhalte auch nicht überall auf der Welt exakt gleich dargestellt. Aber immerhin ist es so, dass eine mathematisch gebildete Person, die in ein Land reist, dessen Sprache sie nicht beherrscht, in einer Mathematiklektion doch das meiste verstehen dürfte.

Präzise und klar zu bezeichnen und abzukürzen, das sind die wichtigsten Funktionen der mathematischen Symbole. Gemäss Alfred North Whitehead (britischer Mathematiker, 1861–1947) besteht ihr Nutzen darin, *„dass eine vernünftige Bezeichnung den Verstand von aller unnötigen Denkarbeit entlastet und ihm so gestattet, sich ganz auf fortgeschrittene Probleme zu konzentrieren.“* Man stelle sich nur einmal vor, wie umständlich und belastend es wäre, wenn man etwa die binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ganz ohne mathematische Symbole ausdrücken müsste.

Hier ist eine Auswahl an mathematischen Symbolen, die Ihnen wahrscheinlich geläufig sind.

Geläufige mathematische Symbole

Natürliche Zahlen und Null:
$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Negative ganze Zahlen:
$-1, -2, -3, -4, \ldots$

Rationale Zahlen:
$\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{15}{7}, -\frac{1}{3}, \ldots$

Kreiszahl:
π (ca. 3.14159265)

Variablen/Parameter:
$x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots$

Operationszeichen:
$+, -, \cdot, :, /, \sqrt{\cdot}, \sqrt[3]{\cdot}, \cdot^3, \cdot^2, \ldots$

Relationszeichen:
$=, \neq, <, \leqslant, >, \geqslant, \approx, \in, \notin, \subset, \not\subset, \supset$

Gruppierungszeichen:
$(\ldots), [\ldots], \{\ldots\}$

Zeichen aus der Mengenlehre:
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \emptyset, \{\}, \ldots$

Geometrische Zeichen:
$\triangle, \square, \measuredangle, \perp, \parallel, \ldots$

Weitere Zeichen:
$\%, ^\circ, \pm, \infty, \ldots$

Und hier ist eine Auswahl von Symbolen, denen Sie im Laufe der Ausbildung in Mathematik begegnen dürften:

Weitere mathematische Symbole

$\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, |\cdot|, \|\cdot\|, \lfloor\cdot\rfloor, \lceil\cdot\rceil, \circ, \times,$

$\sum \cdots, \prod \cdots, \bigcap \cdots, \bigcup \cdots,$

$\sin, \cos, \tan, \sin^{-1}, \cos^{-1}, \arcsin, \exp, \log,$

$\mathrm{e}, i, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{Re}, \mathrm{Im}, z^T, \lim\limits_{\delta x \to 0},$

$f', f'', f^{(3)}, \frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v},$

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \oint \ldots, \iint \ldots, \iiint \ldots,$

$$\vec{v}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$!, \bar{X}, \sigma_X, \mu_X, E(X), \ldots$

Einige Symbole lassen sich bestimmten Autoren zuschreiben. So weiss man etwa, dass Christian Kamp 1808 die Bezeichnung $n!$ für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ der ersten n natürlichen Zahlen eingeführt hat und dass die Verwendung des Buchstabens e für die Zahl $2.7182818284\ldots$ auf Leonhard Euler (1727) zurückgeht. Dagegen ist der Ursprung vieler Zeichen unklar. Einige Symbole sind einfach nur abgekürzte Wortzeichen; so ist etwa $+$ die mittelalterliche Zusammenziehung des lateinischen „et“. π ist der Anfangsbuchstabe des griechischen Wortes für Peripherie, $\int$ ist das langgezogene „S“ für Summe, und so weiter.

Terme

Mit einzelnen Symbolen lässt sich keine spannende Mathematik betreiben. Ebenso entsteht aus einzelnen Buchstaben noch kein interessanter Text. Im Mindesten muss man aus den Buchstaben sinnvolle Wörter bilden können. In der Mathematik sind dies die Terme.

Merke:

Unter einem **Term** versteht man eine sinnvolle Aneinanderreihung von mathematischen Symbolen, in der aber kein Relationszeichen vorkommt.

Beispiele von Termen:

$$17 + 5 - 3,$$

$$(3x - (6 - 7x)) - (8 - 2x),$$

$$(a + b)^2,$$

$$\tfrac{\pi}{3} - \left(\tfrac{2}{5}\right)^2,$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

Entscheidend ist also, dass Terme syntaktisch korrekt gebildet werden; endlich viele Zeichen müssen so konkateniert (aneinandergereiht) werden, dass sinnvolle „Wörter“ entstehen, die weltweit einheitlich interpretiert werden.

Entscheidend ist weiter, dass kein Relationszeichen vorkommt. Sobald ein solches involviert ist, spricht man nicht mehr von einem Term, sondern von einer *Formel* oder einer *Aussage* oder *Aussageform*. (Mehr dazu später.) Die folgenden Ausdrücke sind also *keine* Terme:

$$2 + 3 = 15,$$

$$77 < 78,$$

$$2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b),$$

$$40x - (5 - 13x) = 88 - 25x.$$

Terme müssen natürlich bedeutungsvoll sein; sie bilden immer einen sinnvollen Weltausschnitt ab, etwa eine Rechnung, die mit realen Grössen ausgeführt werden soll. Bildet man Terme ganz ohne Nachdenken, so geschieht etwas, was Wissenschaftler von der TU Dortmund Mitte der neunziger Jahre beobachtet haben: Sie hatten deutschen Schülerinnen und Schülern die folgende Aufgabe gestellt:

„Ein 27 *Jahre alter Hirte hat* 25 *Schafe und* 10 *Ziegen. Wie alt ist der Hirte?“*

Obwohl die Lösung ja angegeben ist, rechneten viele Kinder munter drauflos und bildeten wahllos Terme wie etwa $27+25+10$, $27+25-10$ und so weiter. Erklärt wurde das damit, dass in der Schule haufenweise Textaufgaben gelöst werden, die völlig belanglos sind und nichts mit dem Leben der Kinder zu tun haben, so dass diese einfach nur nach den Zahlen Ausschau halten und dann sofort losrechnen, ohne über die Bedeutung der Grössen nachzudenken. Genau das darf uns keinesfalls passieren.

Anhang:

Man könnte sich daran stören, dass wir nicht ganz präzise definiert haben, was ein Term ist, zumal wir in der Mathematik immer wieder die Wichtigkeit von präzisen, eindeutigen Definitionen hervorheben. Die Festsetzung, ein Term sei eine sinnvolle Aneinanderreihung mathematischer Symbole, lässt einen ja mit der Frage zurück, was denn „sinnvoll“ genau bedeutet. In der Tat kann man das sehr viel genauer festlegen. Dies soll hier angefügt werden, auch wenn es sehr abstrakt erscheinen mag:

Definition: *Jede Zahl ist ein* ***Term****.*

Jede Variable und jeder Parameter ist ein ***Term****.*

Ist f ein k-stelliges Operationssymbol und sind $t_1, \ldots, t_k$ Terme, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein ***Term****.*

Nichts sonst ist ein ***Term****.*

Wie ist das zu verstehen? Nun, es ist klar, dass jede einzelne Zahl und jeder einzelne Buchstabe ein Term ist. Dies sind also alles Terme:

$$1, 456, \sqrt{3}, -\frac{7}{9}, \pi, x, y, z, \ldots$$

Ein Funktionssymbol ist zum Beispiel „+“. Und es ist zweistellig, weil es auf zwei Zahlen oder Buchstaben oder Terme angewendet werden kann. Man kann es beispielsweise auf die beiden Zahlen 2 und 7 anwenden und erhält dann

$$+(2, 7)$$

was natürlich meist nicht so, sondern in der geläufigeren Form

$$2 + 7$$

notiert wird. Ebenso kann man mit der zweistelligen Operation „$-$“ und den beiden Termen x und 5 den neuen Term

$$x - 5$$

bilden. Und man kann mit der einstelligen Operation $\sqrt{\cdot}$ und dem Term $2x+3$ den neuen Term

$$\sqrt{2x + 3}$$

bilden, und so weiter. Operationen können also auf schon bestehende Terme angewendet werden und generieren so neue Terme.

Die Wendung „Nichts sonst ist ein Term“ macht deutlich, dass man auf keine andere Art einen Term erzeugen kann. Insbesondere ist es also kein Term mehr, wenn man zwischen zwei Terme ein Gleichheitszeichen setzt.

Auf diese Weise kann ganz präzise festgelegt werden, was ein Term ist, ohne dass man auf vage Begriffe wie „sinnvoll“ ausweicht.

Woher kommen Gleichungen?

Wenn man an Schulen von Gleichungen spricht, so meint man meist Gleichungen der Art

$$2x - 5 = 17 - 3x.$$

Oft ist dann gar nicht klar, woher diese Gleichung kommt. Sie steht in einem Lehrbuch, und als Schülerin oder Schüler weiss man ganz genau, was man damit zu tun hat, aber dass die Gleichung eine Vorgeschichte haben muss, wird meist verschwiegen.

Sagen wir es ganz deutlich: Gleichungen fallen nicht vom Himmel; sie drücken vielmehr eine Frage aus, die sich in einem bestimmten Weltausschnitt stellt. Welche Zahlenmenge X aus einer bestimmten Grundmenge zugelassener Zahlen hat die Eigenschaft, dass man denselben

Wert erhält, wenn man für eine Zahl x die in X enthalten ist, $2x-5$ rechnet und wenn man $17-3x$ rechnet? Aus irgendeinem Grund sind die Terme $2x-5$ und $17-3x$ in diesem Weltausschnitt bedeutungsvoll, und es ist wichtig, herauszufinden, wann sie gleich sind.

Betrachten wir ein paar Beispiele: Wir befinden uns in den USA, wo Temperatur meist in Grad Fahrenheit gemessen wird, und wir wissen, dass man, um Fahrenheit in Celsius umzurechnen, erst 32 subtrahieren und dann den erhaltenen Wert mit $\frac{5}{9}$ multiplizieren muss. Der Term

$$\frac{5}{9}\cdot(F-32)$$

liefert also die entsprechende Celsiuszahl. Nun könnte es ja sein, dass wir, um ein Gefühl für dieses ungewohnte Mass zu erhalten, herausfinden wollen, welcher Fahrenheitwert $20°C$ entspricht. Dazu setzen wir eine Gleichung an:

$$20=\frac{5}{9}\cdot(F-32).$$

Die Gleichung formalisiert unsere Frage, und es muss unser Bestreben sein, sie nach der unbekannten Fahrenheitzahl zu lösen, um die Antwort zu erfahren.

Ein weiteres Beispiel: Jemand hat uns gesagt, dass eine Masse im freien Fall in guter Näherung $5\cdot t^2$ Meter zurücklegt, wenn t die Zeit in Sekunden seit Beginn des Falls bezeichnet. Es könnte nun sein, dass wir wissen wollen, wie lange eine frei fallende Masse etwa benötigt, um 100 Meter zurückzulegen. Dazu setzen wir eine Gleichung an, die genau diese Frage formalisiert:

$$5\cdot t^2=100.$$

Indem wir sie nach der unbekannten Zeit auflösen, erhalten wir die Antwort auf die gestellte Frage. Und noch ein Beispiel: Materialprüfungsanstalten überprüfen unter anderem auch Drahtseile im Hinblick auf darin enthaltene, von aussen nicht sichtbare Risse.

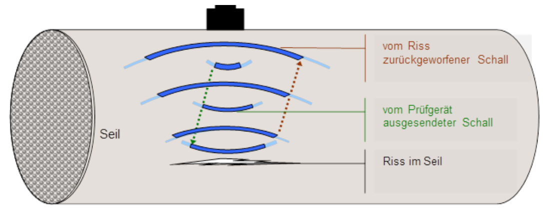


Abbildung 1: Seil mit Rissen

Dazu wird ein Gerät mit Sender und Empfänger für Ultraschall über das Seil geführt. Der vom Gerät ausgesandte Schall durchdringt das Seil nun mit einer bestimmten Geschwindigkeit c. Befindet sich kein Riss in dem untersuchten Seilabschnitt, so wird ein Teil des ausgesandten Schalls am unteren Seilende zurückgeworfen und vom Gerät wieder empfangen. Trifft der Schall aber auf eine Risszone, wird er früher zurückgeworfen und somit auch früher detektiert. Wenn wir wissen wollen, wie lange der Schall im rissfreien Seil mit Durchmesser d unterwegs sein wird, so können wir die Gleichung

$$2\cdot d=c\cdot t$$

ansetzen und nach der unbekannten Zeit t auflösen. Stimmt diese Zeit mit der gemessenen überein, so können wir davon ausgehen, dass der untersuchte Seilabschnitt rissfrei ist.

In all diesen Beispielen ist die Gleichung als Formalisierung eines Sachverhaltes in einem klar begrenzten Weltausschnitt entstanden. Wenn wir also eine Gleichung wie

$$2x-5=17-3x$$

antreffen, sollten wir uns bewusst sein, dass sie eine Vorgeschichte hat, dass sie einen bestimmten Sachverhalt ausdrückt. Aber natürlich ist dann meistens auch die Frage wichtig, wie die Gleichung gelöst werden kann. Wahrscheinlich ist Ihnen folgendes Lösungsschema sehr vertraut:

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 17 - 3x && \mid +3x \\ 5x - 5 &= 17 && \mid +5 \\ 5x &= 22 && \mid :5 \\ x &= 4.4 \end{aligned}$$

Man darf aber nicht verschweigen, dass es eine grosse Zahl von Gleichungstypen gibt und dass die Lösung durchaus nicht immer so einfach ausfällt. Es gibt sogar Gleichungen, die überhaupt nicht durch schrittweises formales Umformen aufgelöst werden können. Das Lösen von Gleichungen kann also ganz schön interessant sein. Und daraus erwächst eine weitere Motivation, Gleichungen zu untersuchen: Man kann sich fragen, ob man eine Gleichung von dem und dem Typ überhaupt lösen könnte, falls eine auftreten sollte. Könnten Sie zum Beispiel die *quadratische Gleichung*

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

bereits lösen? Könnten Sie die *kubische* Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + \frac{7}{3}x + 1 = 0$$

bereits lösen? Damit soll Folgendes deutlich gemacht werden: Es kann durchaus sinnvoll sein, einfach mal eine fertige Gleichung zu nehmen und sich zu fragen, ob man sie lösen kann. In der Praxis fallen Myriaden von Gleichungen der unterschiedlichsten Typen an; darum besteht bestimmt irgendwann und irgendwo Bedarf nach einer geeigneten Lösungsmethode. Und deshalb ist das Lösen von Gleichungen ein grosses Forschungsfeld der Mathematik geworden.

Wenn man bei Gleichungen an Beispiele der oben besprochenen Art denkt, dann denkt man eigentlich an *Bestimmungsgleichungen*. Solche haben (mindestens) eine Unbekannte, und das Ziel besteht immer darin, sie aufzulösen. Auflösen bedeutet, ein Verfahren anzuwenden, an dessen Ende klar ist, welche Zahlen (einer vorher definierten Grundmenge) man in die Unbekannte einsetzen darf, damit insgesamt eine wahre Aussage entsteht. Das muss gleich präzisiert werden.

Aussage und Aussageform

In der Mathematik wird der Begriff *Aussage* verwendet, wenn dem Behaupteten eindeutig einer der beiden Wahrheitswerte *wahr* (w) oder *falsch* (f) zugeordnet werden kann. Dies sind Beispiele von Aussagen samt ihren Wahrheitswerten:

$$\begin{array}{ll} 3 + 8 = 11 & (w) \\ 1 + 1 = 3 & (f) \\ 2 \in \{3, 4, 5, 6, 7\} & (f) \\ 2 \text{ ist eine Primzahl} & (w) \\ (-3)^2 < 0 & (f) \end{array}$$

Wenn wir eine Gleichung lösen, suchen wir somit nach einer Belegung für die Unbekannte(n), so dass insgesamt eine wahre Aussage entsteht. Die Gleichung

$$2x - 5 = 17 - 3x$$

wird zum Beispiel zu einer wahren Aussage, wenn wir die Variable x mit dem Wert 4.4 belegen:

$$\begin{array}{rrcl} & 2 \cdot 4.4 - 5 & = & 17 - 3 \cdot 4.4 \\ \Leftrightarrow & 3.8 & = & 3.8. \end{array} \qquad (w)$$

Würden wir die Unbekannte dagegen mit einer anderen Zahl, etwa 0, belegen, so entstünde eine falsche Aussage:

$$\begin{array}{rrcl} & 2 \cdot 0 - 5 & = & 17 - 3 \cdot 0 \\ \Leftrightarrow & -5 & = & 17. \end{array} \qquad (f)$$

Eine Bestimmungsgleichung zu lösen, bedeutet also, alle Belegungen der Unbekannten zu finden, die zu einer wahren Aussage führen. Eine Gleichung wie

$$2x - 5 = 17 - 3x$$

ist selber natürlich keine Aussage, weil nicht klar ist, welchen Wahrheitswert sie hat; das hängt ja eben von der Belegung ab. Eine solche Gleichung nennt man darum *Aussageform*.

Neben Bestimmungsgleichungen, mit denen Sie sicher schon einige Erfahrungen gesammelt haben, gibt es aber weitere Typen von Gleichungen. Im folgenden Abschnitt soll ins Durcheinander aller Gleichungen ein wenig Ordnung gebracht werden.

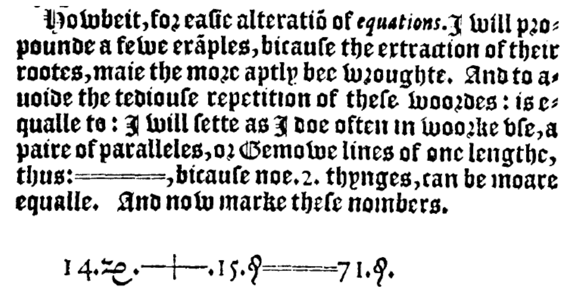
Typen von Gleichungen

Zunächst: Eine Gleichung aufzustellen, bedeutet eigentlich, die Gleichheit zweier Terme festzustellen oder zu fordern. Dass ein erster Term (linke Seite LS) und ein zweiter Term (rechte Seite RS) einander gleich sind oder sein sollen, wird durch Verwendung des Gleichheitszeichens ausgedrückt:

$$LS = RS.$$

Die Einführung dieses Zeichens datiert übrigens aus dem 16. Jahrhundert. Der englische Mediziner und Mathematiker Robert Recorde hat es in *The whetstone of witte* (London, 1557) erstmals verwendet.

Durch Gleichsetzen von Termen entstehen also Gleichungen. Aber die Gleichungen, die so entstehen, können sich in ihrer Bedeutung und Behandlung stark unterscheiden. Wir besprechen nun kurz: Bestimmungsgleichungen, Identitäten, Axiome, naturwissenschaftliche Gesetze und Definitionsgleichungen.


Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═════, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

14.ꝛ. —+— .15.ϱ ═════ 71.ϱ.

Abbildung 2: Ausschnitt aus „*The whetstone of witte*“

Bestimmungsgleichungen

Bestimmungsgleichungen sind, wie schon besprochen, Gleichungen mit mindestens einer Unbekannten. Es sind also Aussageformen, die durch geeignete Belegungen zu wahren Aussagen werden können oder eben nicht. Was als Belegung in Frage kommt, hängt von der verwendeten Grundmenge G ab. Beispielsweise ist die Gleichung

$$x + 7 = 5$$

in der Grundmenge $G = \mathbb{N}$ nicht lösbar; es gibt keine natürliche Zahl, so dass die Aussageform in eine wahre Aussage übergeht. Über dieser Grundmenge ist die Gleichung darum *unlösbar* oder *unerfüllbar*. Die Lösungsmenge ist leer. Dagegen ist die Gleichung *lösbar* oder *erfüllbar*, sobald wir als Grundmenge mindestens die ganzen Zahlen erlauben. Die Lösungsmenge besteht nur aus einer einzige Zahl, nämlich $x = -2$.

Die Bestimmungsgleichung

$$x^2 = 2$$

ist über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$ nicht lösbar; es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat exakt 2 ist. Dagegen hat die Gleichung zwei Lösungen, sobald wir als Grundmenge die reellen Zahlen erlauben. Dann ist $x = \pm\sqrt{2}$.

Die Bestimmungsgleichung

$$x^2 = -2$$

hat auch über der Grundmenge der reellen Zahlen keine Lösung, denn es lässt sich keine Zahl finden, deren Quadrat negativ wird.

Bei Bestimmungsgleichungen geht es also darum, für die Unbekannte(n) alle Belegungen innerhalb der zugelassenen Grundmenge zu finden, für die die Aussageform in eine wahre Aussage übergeht.

Identitäten

Die Gleichung

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

unterscheidet sich in offensichtlicher Weise von den bisher betrachteten Bestimmungsgleichungen. Dies ist eine sogenannte Identität. Es zeichnet sie aus, dass sie für jede mögliche Belegung zu einer wahren Aussage wird. Und es ist ja auch nicht so, dass sie eine Variable enthält, nach der es aufzulösen gilt. Hier soll nicht nach einer ganz bestimmten Belegung gesucht werden, sondern es wird ganz allgemein festgestellt, dass die beiden Terme $a^2 - b^2$ und $(a+b) \cdot (a-b)$ generell - eben bei jeder denkbaren Belegung - identischen Wert haben.

Eine Identität kann bewiesen werden, indem die eine Seite in die andere umgeformt wird:

$$\begin{aligned} RS &= (a + b) \cdot (a - b) \\ &= a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) \\ &= a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 \\ &= a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \\ &= LS. \end{aligned}$$

Weitere Beispiele von Identitäten sind etwa

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

über der Grundmenge der natürlichen Zahlen oder

$$\exp(i \cdot \varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

über der Grundmenge der reellen Zahlen, und so weiter. Es gibt auch Identitäten, die nicht bewiesen werden, weil sie Axiome sind.

Axiome

Axiome sind Aussagen, die unbewiesen in den Grundlagen der Mathematik festgeschrieben werden, meist deshalb, weil sie so einfach und einsichtig sind, dass es nicht möglich ist, sie aus noch einfacheren Aussagen deduktiv abzuleiten. Hier sind einige Beispiele von Axiomen:

> Das *Kommutativgesetz* der Addition reeller Zahlen: $a + b = b + a$,
>
> Das *Kommutativgesetz* der Multiplikation reeller Zahlen: $a \cdot b = b \cdot a$,
>
> Die *Assoziativgesetze*:
>
> $$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c), \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \end{aligned}$$
>
> Das *Distributivgesetz*: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$,
>
> Die *Peano-Axiome*: 0 ist eine natürliche Zahl. Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Nachfolger. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich. Enthält eine Menge die 0 und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, so enthält die Menge alle natürlichen Zahlen.

Gewisse Axiome sind also Gleichungen, andere nicht. Wichtig ist, dass sich Axiome, die die Form von Gleichungen haben, sich eben von anderen Gleichungstypen unterscheiden; sind enthalten keine Variablen, nach denen aufgelöst werden soll, und es sind keine beweisbaren Identitäten. Es sind Aussagen, die ohne Beweis für wahr gehalten und darum akzeptiert werden.

Naturwissenschaftliche Gesetze

Naturwissenschaftliche Gesetze haben oftmals die Form von Gleichungen, aber sie sind keine Bestimmungsgleichungen und keine Identitäten, und meist sind sie auch keine Axiome. Drei Beispiele mögen den Unterschied erhellen:

Durch Experimente kann festgestellt werden, dass eine Masse, die sich im freien Fall befindet, in guter Näherung nach t Sekunden Fall die Strecke $5t^2$ in Metern zurückgelegt hat. Das Gesetz lautet also so:

$$s = 5 \cdot t^2.$$

Nun ist das keine Bestimmungsgleichung, weil es nicht darum geht, nach einer Variablen aufzulösen, und es ist keine Identität, denn es ist nicht möglich, die eine Seite durch formales Umformen in die andere Seite zu überführen. Es ist vielmehr die Feststellung eines Zusammenhangs zweier Grössen, welcher durch Experimente erhärtet, aber nicht formal bewiesen werden kann.

Wird an ein Objekt eine elektrische Spannung angelegt, so verändert sich der Stromfluss in seiner Stärke proportional zur Spannung. Der Quotient aus Spannung und Stromstärke ist also konstant. Als physikalisches Gesetz notiert man das meist so:

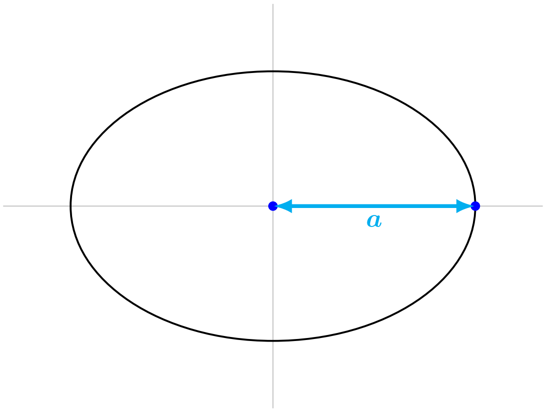
$$\frac{U}{I} = R = \text{konst.} \quad \Leftrightarrow \quad U = R \cdot I.$$

Wiederum muss man sagen, dass dies keine Bestimmungsgleichung ist. Sie könnte natürlich eine werden, wenn wir etwa die Spannung U sowie den Widerstand R kennen und nun nach der Stromstärke I auflösen wollen. Aber grundsätzlich drückt die Gleichung $U = R{\cdot}I$ einfach einen nicht-trivialen Zusammenhang zwischen gewissen physikalischen Grössen aus. Die Gleichung kann auch nicht bewiesen werden, indem eine Seite so lange umgeformt wird, bis die andere Seite daraus entstanden ist; darum handelt es sich hier auch nicht um eine Identität. Und schliesslich ist die Gleichung auch kein Axiom, weil es nicht unmittelbar klar ist, dass die Terme U und $R \cdot I$ immer identische Werte liefern, ohne dass Experimente durchgeführt werden.

Am 15. Mai 1618, nach intensivem Studium der Daten zur Umlaufbahn des Mars, entdeckte Johannes Kepler ein Gesetz, das später *drittes Keplersches Gesetz* genannt werden sollte:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweiter Planeten verhalten sich zueinander wie die Kuben der grossen Bahnhalbachsen.



Bei einer Ellipse gibt es eine grosse Halbachse (a) und eine kleine Halbachse. Das Gesetz besagt nun Folgendes: Wenn man zwei Planeten ins Auge fasst, von denen jeder auf einer Ellipsenbahn um die Sonne läuft, so kann man das Verhältnis der dritten Potenzen der beiden grossen Halbachsen bilden und aus dem Ergebnis die Wurzel ziehen - und man erhält so das Verhältnis der beiden Umlaufzeiten. Auch dies ist also ein durch eine Gleichung ausgedrückter Zusammenhang von physikalischen Grössen, der sich uns erst nach der Auswertung zahlreicher Messwerte erschliesst. Darum ist es kein Axiom, keine Identität und auch keine Bestimmungsgleichung.

Definitionsgleichungen

Zum Schluss soll noch eine weitere Art von Gleichungen kurz gestreift werden: die Definitionsgleichung. Angenommen, wir sind in längere Berechnungen verstrickt und stellen fest, dass gehäuft die Zahl

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$$

vorkommt. Um diesen Term nicht jedes Mal in voller Länge aufschreiben zu müssen, beschliessen wir, den Term durch einen Buchstaben abzukürzen und wir wählen dazu den griechischen Buchstaben φ (Phi). Von jetzt an soll also immer dieser Buchstabe für die oben erwähnte Zahl stehen. Das nennt man eine *Definition*; einem neuen Symbol (oder Begriff) wird eine klare Bedeutung zugeordnet. Und dafür verwendet man in der Mathematik nicht das gewöhnliche Gleichheitszeichen, sondern ein Gleichheitszeichen mit vorangestelltem Doppelpunkt:

$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Bestimmt kennen Sie bereits die folgende Definition: Bezeichnet U den Umfang und d den Durchmesser eines Kreises, so definiert man

$$\pi := \frac{U}{d}.$$

Die Kreiszahl π (Pi) soll also für das konstante Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser stehen. Freilich werden auch Begriffe definiert. So definiert man etwa, dass man unter einer Raute ein Parallelogramm mit lauter gleich langen Seiten verstehen will:

$$\text{Raute} := \begin{array}{l}\text{Parallelogramm mit}\\ \text{gleich langen Seiten}\end{array}.$$

Natürlich muss man dabei schon wissen, was ein Parallelogramm ist und was mit „Seiten" gemeint ist und was „gleich lang" bedeutet. Eine Definition muss also immer so aufgebaut werden, dass die Bedeutung eines neuen Zeichens, eines neuen Begriffs klar abgegrenzt und erklärt wird unter Verwendung bereits erklärter Zeichen oder Begriffe.

Äusserlich kann eine Definition also wie eine Gleichung aussehen, aber tatsächlich handelt es sich um etwas vollkommen anderes.

Die einfachsten Terme

Beim mathematischen Arbeiten fallen immer wieder Terme an. Diese können ganz unterschiedlich aussehen, unterschiedlich viele Zahlen, Parameter und Variablen enthalten und unterschiedlich komplex sein. Die einfachsten Terme sind wohl lineare Terme. Darunter versteht man Ausdrücke, in denen - salopp ausgedrückt - die Unbekannten nicht quadriert oder mit anderen Exponenten ungleich 1 potenziert und auch nicht radiziert werden und in denen auch keine anderen „Unannehmlichkeiten“ auftauchen.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
&3t,\\
&100-5t,\\
&71,\\
&6t+5,\\
&2500-35x,\\
&3.8x+6,\\
&\sqrt{2}\cdot x.
\end{aligned}$$

In all diesen Termen kommt entweder gar keine Variable vor oder sie kommt nur in der ersten Potenz vor, allenfalls multipliziert mit einer Zahl und additiv ergänzt um eine weitere Zahl. Solche Terme sind ebenso einfach wie häufig, und darum haben sie einen eigenen Namen erhalten: Sie heissen *linear*.

Einen linearen Term zusammenbauen

Für das Verständnis von Linearität ist es hilfreich, sich einen Bausatz vorzustellen, der aus zwei Sorten Klötzchen besteht: Variablen und Zahlen. Zudem stehen drei Sorten Leim zur Verfügung, um die Klötzchen zu einem Ganzen zu verkleben: der Additionsleim, der Subtraktionsleim sowie ein Multiplikationsleim, welcher aber nur angewendet werden darf, wenn wenigsten eines der beiden Klötzchen eine Zahl ist. Dieser Zusatz verhindert, dass etwa das Produkt zweier Variablen oder eine Potenz einer Variablen entstehen kann, wodurch Linearität ja verletzt wäre.

Der Linearitäts-Bausatz:	
Variablen: $x, y, z, t, \ldots$	Zahlen aus $\mathbb{R}$: $-1, 0, 1, 2, \ldots, \frac{3}{7}, \ldots, \sqrt{2}, \ldots$
3 Leimsorten: $+$ (Addition) $-$ (Subtraktion) $\cdot$ (Multiplikation, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren eine Zahl ist)	

Wenn wir nun einen linearen Term zusammenbauen wollen, so dürfen wir beliebig viele Variablen und Zahlen nehmen - jede auch mehrfach - und sie mit den drei Leimsorten zu einem Ganzen zusammenkleben. Dabei können zum Beispiel Terme wie diese entstehen:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\\
&3x-4x+1.5x+11-7.8\\
&2x+51y-x+36+0.5y-7\\
&8\cdot(x+3y)-z+3\cdot(x-6z)+1
\end{aligned}\tag{$\star$}$$

Dagegen ist es unmöglich, etwa den Term x^2-3x+4 zu erzeugen, weil kein Leim zur Verfügung steht, der die Variable x mit sich selber verleimen könnte. Und es ist unmöglich, den Term $\sqrt{x}-x^7+x/y-5$ zu erzeugen, weil die Leime keine Radizierung und keine Division durch Variablen und keine Potenzierung einer Variablen erlauben.

Freilich lassen sich lineare Terme oft auch noch vereinfachen. Wenn man das mit den Termen aus $(\star)$ tut, so erhält man:

$$\frac{1}{35}$$
$$0.5x + 3.2$$
$$x + 51.5y + 29$$
$$11x + 24y - 19z + 1$$

Wir sehen also: Ein linearer Term ohne Variablen kann stets zu einer einzigen Zahl zusammengezogen werden. Ein linearer Term in einer Unbekannten, etwa x, kann stets in die Form $a \cdot x + b$ mit irgendwelchen reellen Zahlen a und b gebracht werden. Ein linearer Term in zwei Variablen, etwa x und y, kann stets zu $a \cdot x + b \cdot y + c$ vereinfacht werden, wenn a, b, c irgendwelche reellen Zahlen sind, und so weiter. Diese Überlegung ermöglicht uns, Linearität wie folgt zu definieren:

Definition:
*Ein Term in $0, 1, 2, 3, \ldots$ Variablen heisst **linear**, wenn er in die Form*

$$\begin{aligned} a &\quad (\textit{keine Variable}) \\ a \cdot x + b &\quad (\textit{eine Variable: } x) \\ a \cdot x + b \cdot y + c &\quad (\textit{zwei Variablen: } x, y) \\ a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d &\quad (\textit{drei Variablen: } x, y, z) \end{aligned}$$

und so weiter gebracht werden kann, wobei $a, b, c, d, \ldots$ reelle Zahlen sind.

Das Konzept der Linearität ist hilfreich, weil es uns erlaubt, Terme zu klassifizieren, nämlich in Terme mit dem einfachst-möglichen Bauplan, eben die linearen, und in nicht-lineare Terme, die einen komplizierteren Bauplan haben.

Zwei linear voneinander abhängende Grössen

Betrachten wir als Beispiel ein Taxiunternehmen. Wir haben vielleicht festgestellt, dass der Preis sich aus dem Term $3.8x + 6$ berechnet, wenn x die Anzahl gefahrener Kilometer bezeichnet. Wenn wir auch für den Fahrpreis einen Buchstaben einführen, etwa y, so gilt also:

$$y = 3.8x + 6.$$

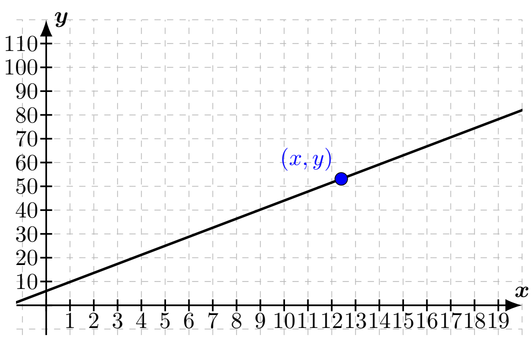
In dieser Gleichung kommen nun zwei Grössen vor, die Kilometerzahl x und der Fahrpreis y. Und wir sehen, *dass y linear von x abhängt*. Das ist nicht selbstverständlich. Es könnte ja auch sein, dass bei zunehmender Kilometerzahl der Preis pro Kilometer abnimmt, was tatsächlich auch ab und zu vorkommt. Dann aber wäre y nicht mehr linear von x abhängig.

Wir sagen also, dass eine Grösse y *linear von einer anderen Grösse x abhängt*, wenn y durch einen Term der Art

$$y = a \cdot x + b$$

dargestellt werden kann mit irgendwelchen reellen Zahlen a und b. Eine solche Gleichung kann nun ganz einfach in einem x-y-Koordinatensystem visualisiert werden. Dazu skaliert man die Achsen geeignet und denkt sich auf der Abszisse alle möglichen x-Werte und auf der Ordinate alle möglichen y-Werte abgebildet. Nun besucht man theoretisch jeden x-Wert, bestimmt mit obiger Gleichung den zugehörigen y-Wert und trägt einen Punkt mit den Koordinaten (x, y) ein.

Für das Taxi-Beispiel entsteht dabei die folgende Grafik:



Auffällig daran ist natürlich, dass eine Gerade entsteht. Warum ist das so? Nun, einfach deswegen, weil jede Erhöhung der Kilometerzahl um 1 dieselbe Veränderung des Fahrpreises nach sich zieht. Oder man könnte auch sagen: Das ist deswegen so, weil y linear von x abhängt. Dass eine Grösse linear von einer anderen Grösse abhängt, lässt sich also auch daran erkennen, dass die graphische Darstellung im Koordinatensystem auf eine Gerade führt.

Spezialfall der Proportionalität

Im technischen Beschrieb eines Autos steht, dass auf 100 Kilometer durchschnittlich 5.6 Liter Benzin verbraucht werden. Wenn wir mit x die Anzahl gefahrener Kilometer und mit y den Benzinverbrauch in Litern bezeichnen, so ist also

$$y = 5.6x.$$

Das ist zweifellos ein linearer Zusammenhang. Der Term $5.6x$ ist linear, weil er die Form $a \cdot x + b$ hat mit $a = 5.6$ und $b = 0$, die Grösse y hängt also linear von der Grösse x ab. Aber natürlich liegt ein Spezialfall von Linearität vor, weil eben $b = 0$ ist. Offenbar ist das Verhältnis der beiden Grössen x und y konstant, denn es ist

$$\frac{y}{x} = 5.6.$$

Anders gesagt: y ist immer 5.6-mal so gross wie x. Man sagt auch: x und y sind proportional zueinander. Zwei veränderliche Grössen heissen *proportional* zueinander, wenn sie immer in demselben Verhältnis zueinander stehen.

Definition:
*Eine Grösse y ist **proportional** zu einer Grösse x, wenn ihr Verhältnis konstant ist, wenn also*

$$\frac{y}{x} = a = \mathit{konst.} \quad \mathit{bzw.} \quad y = a \cdot x$$

gilt.

Proportionalitäten sind überaus zahlreich. Beispielsweise ist bei einem Fahrzeug, das sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt, der zurückgelegte Weg proportional zur Fahrzeit. Beträgt die Geschwindigkeit zum Beispiel 30m/s, so ist das Verhältnis von Fahrstrecke zu Fahrzeit konstant, nämlich gleich 30m/s:

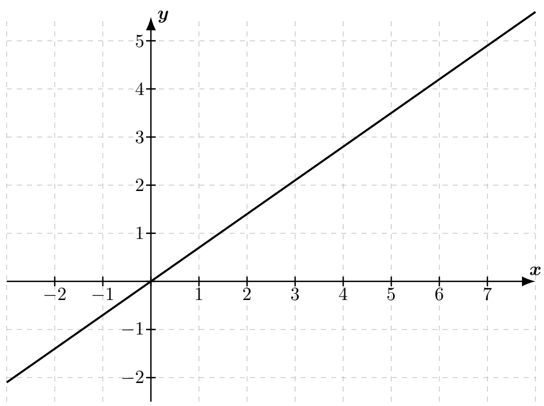
$$\frac{s}{t} = 30 \quad \Leftrightarrow \quad s = 30 \cdot t.$$

Der Kreisumfang ist proportional zum Kreisdurchmesser, weil $U = \pi \cdot d$ gilt. Umfang und Durchmesser stehen also immer im gleichen Verhältnis zueinander, egal, wie gross der Kreis ist.

Oftmals ist auch der Preis proportional zur Stückzahl der gekauften Ware. Wenn eine Tafel Schokolade CHF 1.50 kostet, so kosten x Tafeln dieser Schokolade eben CHF $1.5x$. Das

Verhältnis von Preis zu Stückzahl ist also konstant, ausser natürlich, es werden Mengenrabatte gegeben.

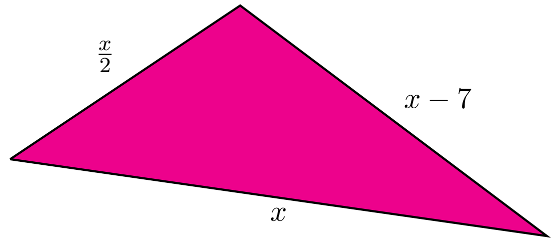
Wenn also zwei Grössen x und y proportional zueinander sind, so gilt $y = a \cdot x$ für eine Konstante a. Das ist einfach nur ein spezieller linearer Zusammenhang. In der graphischen Darstellung muss also auch wieder eine Gerade entstehen. Da aber $b = 0$ ist, führt die Gerade zwingend durch den Ursprung.



Eine Proportionalität erkennt man also einfach daran, dass bei graphischer Darstellung im Koordinatensystem eine Ursprungsgerade entsteht.

Ein Dreieck und eine lineare Gleichung

Jemand verrät uns über ein bestimmtes Dreieck Folgendes: Es hat einen Umfang von 68 Längeneinheiten. Die erste Seite ist halb so lang wie die zweite, und gleichzeitig ist die dritte Seite um 7 Längeneinheiten kürzer als die zweite Seite. Können wir daraus die Längen der drei Seiten ermitteln?



Nun ja, wir können eine Seite mit x anschreiben und wissen dann, dass eine andere Seite die Länge $x/2$ und die dritte die Länge $x - 7$ haben muss. Da zudem der Umfang 68 sein muss, folgt also:

$$x + \frac{x}{2} + x - 7 = 68. \qquad (\star\star)$$

Das ist eine lineare Gleichung. Die Division durch 2 darf uns nicht täuschen, das ist ja nichts anderes als eine Multiplikation mit $1/2$. Wie aber kann man die Gleichung lösen?

Wir haben es hier mit einer Aussageform zu tun. Sie zu lösen, bedeutet, alle möglichen Belegungen für die Unbekannte(n) zu finden, so dass insgesamt eine wahre Aussage entsteht. Würde man x zum Beispiel mit der Zahl 20 belegen, so entstünde die falsche Aussage $43 = 68$. Offenbar ist 20 nicht Lösung der Gleichung. Freilich macht es wenig Sinn, immer nur weitere Zahlen zu probieren, das wäre langweilig, zeitraubend und führt unter Umständen nie zum Ziel. Viel besser ist es, die Gleichung so lange zu *bearbeiten*, bis sich die Lösung zwingend zeigt. Dazu dienen sogenannte *Äquivalenzumformungen*.

Äquivalenzumformungen

Die beiden Terme in Gleichung $(\star\star)$ kann man sich als Gewichte vorstellen, die auf den beiden Schalen einer Apothekerwaage liegen. Das Gleichheitszeichen zeigt, dass die Waage im Gleichgewicht ist. Nun können wir sicherlich auf beiden Schalen dasselbe Gewicht dazu fügen oder wegnehmen, ohne dadurch an dem Gleichgewicht etwas zu ändern. Das Addieren oder Subtrahieren des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ändert die Gleichung also nicht, genauer: Ändert die Lösungsmenge nicht. Wenn eine Zahl vorher Lösung der Gleichung war, so auch nachher noch. Denn angenommen, wir wissen, dass die beiden Terme

$$x + \frac{x}{2} + x - 7$$

und 68 für einen ganz bestimmten x-Wert denselben Wert liefern, dass dieser bestimmte x-Wert also eine Lösung ist. Weiter angenommen, wir addieren nun auf beiden Seiten der Gleichung denselben Term T, wobei es einerlei ist, ob dieser die Variable enthält oder nur Zahlen. Dann sind natürlich auch die beiden Terme

$$x + \frac{x}{2} + x - 7 + T$$

und $68 + T$ wertgleich, wenn man den vorher bestimmten x-Wert einsetzt. Darum nennt man das Addieren oder Subtrahieren des gleichen Terms auf beiden Seiten einer Gleichung eine Äquivalenzoperation; die neue Gleichung ist *äquivalent* (gleichwertig) zu der alten.

Wir ändern ebenfalls die Lösungsmenge der Gleichung nicht, wenn wir beide Seiten mit einer Zahl ungleich 0 multiplizieren oder durch eine Zahl ungleich 0 dividieren. Denn werden zwei Terme bei einer ganz bestimmten Belegung von x wertgleich, so sind auch ihre 5-Fachen oder ihre Hälften bei dieser Belegung wertgleich, und so weiter.

Zusammengefasst: Wir ändern die Lösungsmenge unserer Gleichung nicht, solange wir nur auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren oder beide Seiten mit derselben Zahl ungleich 0 multiplizieren oder dividieren.

Merke:

Die *Äquivalenzumformungen*:

> Addition oder Subtraktion desselben Terms auf beiden Seiten der Gleichung.
>
> Multiplikation oder Division beider Seiten der Gleichung mit derselben Zahl ungleich 0.

ändern die Lösungsmenge der Gleichung nicht. Sie können daher verwendet werden, um eine Gleichung so lange umzuformen, bis die Lösungen ermittelt sind.

Jetzt wird gelöst

Damit sind wir nun in der Lage, unsere Gleichung so zu bearbeiten, bis sie die Lösung(en) zeigt.

$$x + \frac{x}{2} + x - 7 = 68.$$

Dabei gibt es meist verschiedene Strategien, die sich teils nur in Nuancen unterscheiden. Wir gehen hier so vor, dass wir erst die beiden Summanden x zusammenfassen und dann zu beiden Seiten der Gleichung 7 addieren:

$$\begin{array}{lrcll} & x + \frac{x}{2} + x - 7 &=& 68 & \\ \Leftrightarrow & 2x + \frac{x}{2} - 7 &=& 68 & \mid +7 \\ \Leftrightarrow & 2x + \frac{x}{2} &=& 75. & \end{array}$$

Nun kann man zum Beispiel beide Seiten mit 2 multiplizieren, um den Bruch wegzubringen:

$$\begin{array}{lrcll} & 2x + \frac{x}{2} &=& 75 & \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow & 4x + x &=& 150 & \\ \Leftrightarrow & 5x &=& 150. & \end{array}$$

Schliesslich bringt uns eine Division durch 5 auf beiden Seiten ans Ziel:

$$\begin{aligned} && 5x &= 150 \qquad &&| :5 \\ \Leftrightarrow && x &= 30. \end{aligned}$$

Wir haben bei diesen Umformungen nur Äquivalenzoperationen verwendet und somit die Lösungsmenge nicht verändert. Das heisst, die letzte Gleichung ($x = 30$) hat noch immer dieselbe Lösungsmenge wie die erste. Und darum ist $x = 30$ die Lösung von ($\star\star$).

Insbesondere stellen wir fest, dass ($\star\star$) nur eine einzige Lösung hat. Wir hatten also Recht, als wir gesagt haben, „bis sich die Lösung zwingend zeigt“. Im Allgemeinen kann eine Gleichung natürlich auch mehr als eine Lösung oder gar keine Lösung haben; darum macht es Sinn, von der Lösungsmenge zu sprechen und zu schreiben:

$$L = \{30\}.$$

L ist also eine Menge mit der Eigenschaft, dass man jedes ihrer Elemente auswählen kann, um dann - nach Einsetzung in die Unbekannte - zu einer wahren Aussage zu gelangen; gleichzeitig ist es aber so, dass keine Zahl ausserhalb L Lösung der Gleichung sein kann.

Zur Lösung einer linearen Gleichung in einer Unbekannten reichen die oben eingeführten Äquivalenzoperationen stets aus. Warum ist das so? Wir erinnern uns: Eine lineare Gleichung in einer Unbekannten, etwa x, besteht aus unter Umständen mehreren Vorkommen von x und Zahlen. Diese Partikel sind „verleimt“, aber es gibt nur drei mögliche Leime: Addition, Subtraktion und eine Multiplikation, bei der aber mindestens ein Faktor eine Zahl sein muss. Die Gleichung zu lösen, bedeutet, sie so lange umzuformen, bis x auf einer Seite isoliert ist, während die andere Seite die Lösungszahl zeigt. Dazu müssen die Verleimungen aufgebrochen werden können, und eben dies schaffen die erwähnten Äquivalenzumformungen. Kommt zum Beispiel der Term $x - 7$ vor, so kann man durch beidseitiges Addieren von 7 die Verbindung $x - 7$ aufbrechen. Kommt zum Beispiel der Term $5x$ vor, so kann man durch beidseitiges Dividieren durch 5 die Unbekannte von ihrem Faktor befreien. Und so weiter.

Ein komplexeres Beispiel

Betrachten wir sogleich ein etwas komplexeres Beispiel:

$$4x - 3(2x - 5) + \frac{1}{3}(7 - 3x) = 8 - 5x.$$

Die Klammern verhindern, dass wir die x-Summanden leicht zusammenfügen können. Darum müssen wir zuerst die Klammern wegschaffen:

$$-3(2x - 5) = -(6x - 15) = -6x + 15$$

und

$$\frac{1}{3}(7 - 3x) = \frac{7}{3} - x.$$

Also:

$$4x - 6x + 15 + \frac{7}{3} - x = 8 - 5x.$$

Jetzt können wir auf der linken Seite die x-Summanden und die Zahlen zusammenfassen:

$$-3x + \frac{52}{3} = 8 - 5x.$$

Jetzt benötigen wir Äquivalenzoperationen:

$$\begin{aligned} & -3x+\frac{52}{3}=8-5x && \mid +5x \\ \Leftrightarrow\quad & 2x+\frac{52}{3}=8 && \mid -\frac{52}{3} \\ \Leftrightarrow\quad & 2x=-\frac{28}{3} && \mid :2 \\ \Leftrightarrow\quad & x=-\frac{14}{3}, \end{aligned}$$

also

$$L=\left\{-\frac{14}{3}\right\}.$$

Anzahl Lösungen

Hat eine lineare Gleichung in einer Unbekannten stets genau eine Lösung? Die bisherigen Beispiele suggerieren das ja. Betrachten wir sogleich ein weiteres Beispiel:

$$8\left(3-\frac{1}{4}x\right)=16-2(x-4).$$

Vereinfachungen auf beiden Seiten führen auf

$$24-2x=24-2x.$$

Wie wir sehen, ist diese Gleichung immer erfüllt. Jede beliebige Belegung der Unbekannten führt auf eine wahre Aussage. Daher ist $L=\mathbb{R}$ (oder welche Zahlmenge auch immer als Grundmenge gewählt wurde).

Wir ändern das Beispiel ein wenig ab:

$$8\left(3-\frac{1}{4}x\right)=15-2(x-4).$$

Vereinfachungen der beiden Seiten führen nun auf

$$24-2x=23-2x.$$

Offenbar gibt es keine reelle Zahl x, für welche die beiden Terme $24-2x$ und $23-2x$ übereinstimmen. Das wird noch deutlicher, wenn wir eine Äquivalenzumformung anwenden:

$$\begin{aligned} & 24-2x=23-2x && \mid +2x \\ \Leftrightarrow\quad & 24=23. \end{aligned}$$

Diese Aussageform ist immer falsch, und daher ist die Lösungsmenge leer: $L=\{\}$.

Man könnte auch so argumentieren: Wir haben festgehalten, dass eine lineare Gleichung in einer Unbekannten stets in die Form $a\cdot x+b$ gebracht werden kann mit irgendwelchen reellen Zahlen a und b. Nun gibt es offenbar zwei verschiedene Fälle: Falls $a\neq 0$ ist, können wir mit zwei Äquivalenzumformungen die Lösung herbeiführen:

$$\begin{aligned} & a\cdot x+b=0 && \mid -b \\ \Leftrightarrow\quad & a\cdot x=-b && \mid :a \\ \Leftrightarrow\quad & x=-\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Es gibt dann also genau eine Lösung wie in unseren beiden ersten Beispielen.

Falls aber $a=0$ ist, gibt es zwei Unterfälle: Ist zusätzlich $b=0$, so haben wir die Gleichung $0=0$, die offenbar immer erfüllt ist. Dann ist $L=\mathbb{R}$; in der Gleichung $0\cdot x+0=0$ kann die Unbekannte mit jeder reellen Zahl belegt werden, und es entsteht immer eine wahre Aussage.

Ist aber $b\neq 0$, so haben wir die Gleichung $0\cdot x+b=0$, und diese ist immer falsch. In diesem zweiten Unterfall ist also $L=\{\}$.

Insgesamt erkennen wir nun deutlich, dass eine lineare Gleichung in einer Unbekannten stets entweder genau eine Lösung hat oder aber unendlich viele Lösungen oder gar keine Lösung hat.

Merke:

Eine lineare Gleichung in einer Unbekannten hat...

... genau eine Lösung,

... unendlich viele Lösungen

... oder gar keine Lösung.

Parameter

Angenommen, wir schleudern eine Masse mit einer Startgeschwindigkeit von $v_0 = 50\text{m/s}$ senkrecht nach oben. Durch die Erdanziehung wird die Geschwindigkeit laufend gebremst und zwar pro Sekunde um 9.81 m/s. (Es war eine der vielen bewundernswerten Leistungen von Galileo Galilei, dass er anfangs des 17. Jahrhunderts erkannt hat, dass auf einen Körper im Schwerefeld der Erde eine gleichmässige Beschleunigung wirkt, die unabhängig von der Masse oder der sonstigen Beschaffenheit des Körpers ist.) Nach wie vielen Sekunden wird die Masse ihren höchsten Punkt erreicht haben, an dem die Geschwindigkeit 0 ist? Dazu kann man die folgende lineare Gleichung aufstellen:

$$50 - 9.81 \cdot t = 0,$$

in der t die Zeit in Sekunden misst. Es ist ein Leichtes, diese Gleichung zu lösen, und wir erhalten etwas mehr als 5 Sekunden.

Das Entscheidende ist nun dies: Wir möchten die Startgeschwindigkeit vielleicht verändern und trotzdem herausfinden, nach wie vielen Sekunden die Masse den höchsten Punkt erreicht. Anstatt aber die Gleichung immer wieder von neuem zu lösen mit ständig sich ändernden Startgeschwindigkeiten, führen wir einen sogenannten *Parameter* ein, also einen Buchstaben, der eine von Fall zu Fall gegebene Grösse repräsentiert:

$$v_0 - 9.81 \cdot t = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung ist noch immer linear, und t ist noch immer die Unbekannte; aber nun enthält die Gleichung einen weiteren Buchstaben, der für eine gegebene Grösse steht. Wir wollen uns bloss nicht festlegen, um bei der Wahl der Startgeschwindigkeit flexibel sein zu können. Aber wir behandeln diesen Parameter wie eine Zahl. Und lösen die Gleichung wie gewohnt:

$$\begin{aligned} & v_0 - 9.81 \cdot t = 0 && \mid +9.81 \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & v_0 = 9.81 \cdot t && \mid : 9.81 \\ \Leftrightarrow \quad & t = \frac{v_0}{9.81}. \end{aligned}$$

Der Vorteil des Parameters wird sofort ersichtlich: Wir kennen die Lösung nun für jede beliebige Startgeschwindigkeit und brauchen bloss noch den konkreten Wert einzusetzen, der uns gerade jetzt interessieren mag. Wir müssen uns nur daran gewöhnen, dass die Lösung von dem Parameter abhängt und somit nicht als reine Zahl in Erscheinung tritt.

Es könnte sogar sein, dass wir die Masse nicht nur auf der Erde hochschleudern wollen, sondern ebenfalls - wenigstens in Gedanken - auf anderen Planeten, wo sie nicht um 9.81 m/s pro Sekunde gebremst wird, sondern um irgendeinen anderen Wert. Dann ist es sinnvoll, einen weiteren Parameter einzuführen, der angibt, um wie viele Meter pro Sekunde die Geschwindigkeit pro Sekunde verringert wird:

$$v_0 - g \cdot t = 0.$$

Auch diese Gleichung ist noch immer linear, und t ist noch immer die Unbekannte, aber jetzt enthält die Gleichung zwei weitere Buchstaben, die für Grössen stehen, die wir uns als bekannt denken und die wir deshalb wie Zahlen behandeln dürfen. Die Auflösung verläuft daher nach bekanntem Muster:

$$\begin{array}{lrl} & v_0 - g \cdot t = 0 & \quad | + g \cdot t \\ \Leftrightarrow & v_0 = g \cdot t & \quad | : g \\ \Leftrightarrow & t = \dfrac{v_0}{g}. & \end{array}$$

Damit kennen wir die Lösung nun für jede mögliche Startgeschwindigkeit und jede mögliche gravitationsbedingte Beschleunigung. Parameter sind darum von unschätzbarem Wert, weil sie unendlich viele Fälle aufs Mal erledigen.

Was, wenn die lineare Gleichung mehr als eine Unbekannte hat?

Die bisher besprochenen linearen Gleichungen hatten immer bloss eine Unbekannte. Was kann man über das Lösen und die Lösungsmenge sagen, wenn eine lineare Gleichung mehr als eine Variable enthält? Betrachten wir zunächst ein Beispiel:

$$2x - 5y = 10.$$

Auch dies ist eine Aussageform, und wir suchen nach Belegungen für die Unbekannten, so dass insgesamt eine wahre Aussage entsteht. Es fällt schnell auf, dass man eine mögliche Belegung mühelos angeben kann: Für $x = 5$ und $y = 0$ ist die Gleichung offenbar erfüllt. Wir haben also bereits eine Lösung gefunden.

Neu ist hier nun, dass *eine* Lösung in der Angabe von *zwei* Zahlen besteht. Hierfür ist in der Mathematik die nützliche *Tupel-Notation* entwickelt worden: Wir schreiben diese eine Lösung in der Form

$$(5, 0),$$

nennen dies ein *2-Tupel* und verstehen es so, dass die erste Zahl für die lexikographisch erste Variable (hier also x) und die zweite Zahl für die lexikographisch zweite Zahl (hier also y) steht. Somit ist auch sofort klar, dass $(0, 5)$ nicht dasselbe 2-Tupel ist wie $(5, 0)$. In der Tat wäre das erste 2-Tupel nicht einmal eine Lösung obiger Gleichung, weil $2 \cdot 0 - 5 \cdot 5 \neq 10$ ist.

Nun gut, wir haben ein 2-Tupel gefunden, welches Lösung unserer Gleichung ist. Gibt es weitere? Ja, klar, zum Beispiel ist $(0, -2)$ auch eine Lösung, weil $2 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) = 10$ ist. In der Tat kann man unendlich viele weitere Lösungen erzeugen. Zum Beispiel kann man für x eine beliebige Zahl setzen und das y dann passend dazu ausrechnen:

> Wählen wir etwa $x = -15$, so muss $y = -8$ sein. Es ist also auch das 2-Tupel $(-15, -8)$ eine Lösung.
>
> Wählen wir etwa $x = 1/2$, so muss $y = -9/5$ sein. Es ist also auch das 2-Tupel $(1/2, -9/5)$ eine Lösung.

Und so weiter.

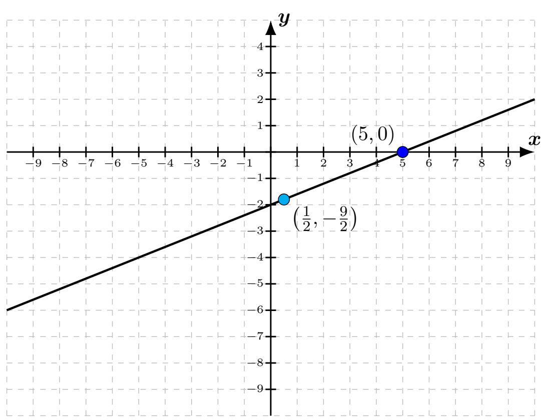
Da es unendlich viele Lösungen gibt, können wir unmöglich alle aufzählen. Aber wir können uns so behelfen, dass wir aufschreiben, wie gross y sein muss, wenn man x irgendwie gewählt hat. Dazu lösen wir zunächst nach y auf:

$$\begin{array}{lrl} & 2x - 5y = 10 & \quad | + 5y, -10 \\ \Leftrightarrow & 2x - 10 = 5y & \quad | : 5 \\ \Leftrightarrow & y = \dfrac{2}{5}x - 2. & \end{array}$$

Und wir schreiben:

$$L = \left\{ (x, y) \; : \; y = \frac{2}{5}x - 2 \right\}.$$

Die Lösungsmenge besteht aus allen (unendlich vielen) 2-Tupeln (x, y), bei denen sich y gemäss obiger Formel berechnet, wenn x irgendwie gewählt wird. Das hat den weiteren Vorteil, dass wir die Lösungsmenge sichtbar machen können. Dazu benutzen wir ein Koordinatensystem, besuchen theoretisch jeden x-Wert auf der Abszisse, bestimmen immer den zugehörigen y-Wert und stellen den Punkt (x, y) dar. Tut man das für obige Lösungsmenge, so erhält man diese Grafik:



Es entsteht eine Gerade, weil die Gleichung linear ist. Und diese Gerade zeigt uns die ganze Lösungsmenge: Jedes 2-Tupel auf dieser Geraden ist eine Lösung der Gleichung, und jedes 2-Tupel ausserhalb der Geraden löst die Gleichung nicht.

Im Allgemeinen besteht die Lösungsmenge einer linearen Gleichung in zwei Unbekannten also aus unendlich vielen 2-Tupeln, weil es immer möglich ist, den Wert der einen Variablen frei zu wählen und die andere Variable dann daran anzupassen. Wie ist es, wenn eine lineare Gleichung drei Unbekannte hat? Betrachten wir das Beispiel

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0.$$

Wenig überraschend gibt es auch hier unendlich viele Lösungen. Diesmal besteht *eine* Lösung freilich in der Angabe von *drei* Zahlen, je eine für jede Unbekannte. Finden wir eine solche Lösung? Nun, ganz leicht: Belegt man x mit der Zahl 5 und die beiden anderen Variablen mit 0, so ist die Gleichung erfüllt. Diese eine Lösung gibt man meist als *3-Tupel* an:

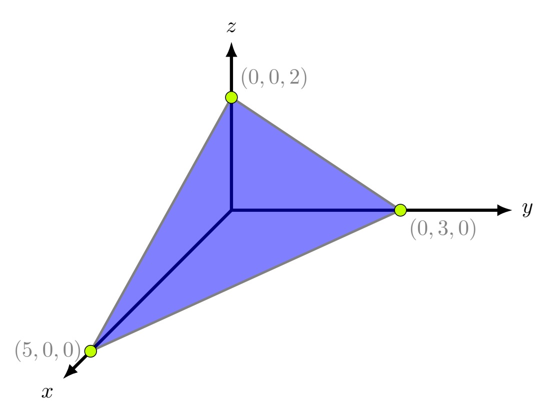
$$(5, 0, 0).$$

Wiederum: Der Vorteil dieser Notation besteht darin, dass sofort klar ist, welche Zahl für welche Unbekannte steht. Und es wäre ein anderes 3-Tupel (und keine Lösung der Gleichung mehr), wenn man die Reihenfolge der Zahlen verändern würde.

Finden wir weitere Lösungen? Klar, jede Menge:

$$(0, 3, 0), (0, 0, 2), (5, 3, -2), \ldots$$

Diesmal fällt uns eine Visualisierung der Lösungsmenge nicht so leicht. Das liegt daran, dass jede Lösung dreidimensional ist und somit nur in einem dreidimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden kann. Es würde viel zu weit führen, das hier genauer zu erläutern. Es sei nur gesagt, dass man zeigen kann, dass die Lösungsmenge eine ebene Fläche im dreidimensionalen Raum ergibt:



Merke:

Liegt eine lineare Gleichung in n Unbekannten vor, so besteht die Angabe einer Lösung in der Angabe von n Zahlen, eine für jede Unbekannte. Notiert wird eine solche Lösung meist als **n-Tupel**

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

aus dem hervorgeht, dass die i-te Unbekannte mit der Zahl a_i belegt werden muss ($i = 1, \ldots, n$).