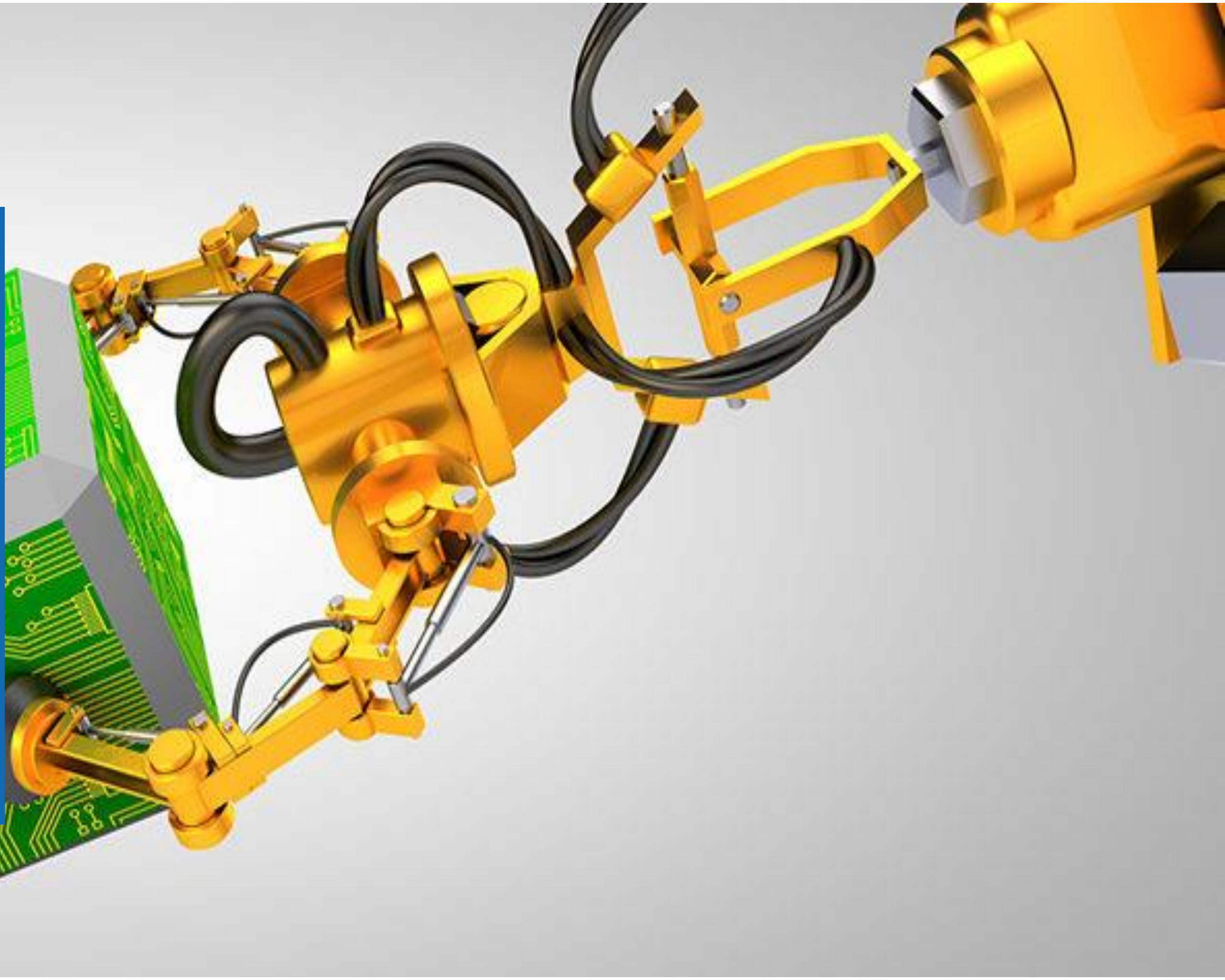
ETH zürich

D MAVT

Dr. Paolo Tiso



Technische Mechanik
151-0223-10

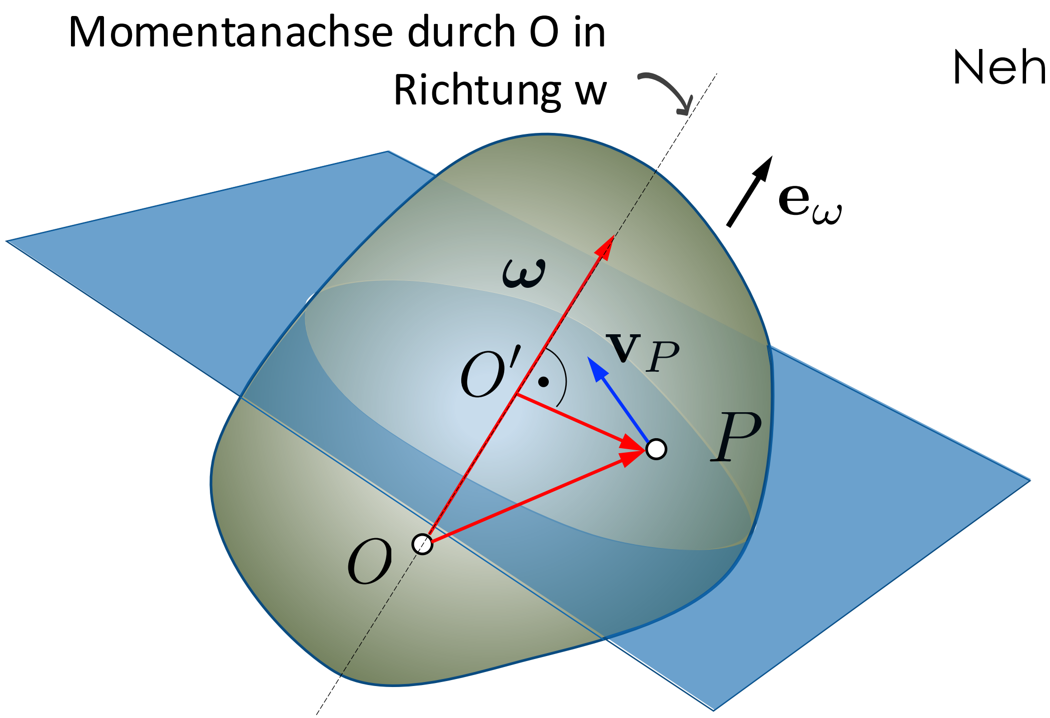
Vorlesung 05

Kinematik des starren Körpers in 3D
Kinematics of rigid body in 3D

Herbstsemester 2025

Letzte Aktualisierung: 06.10.2025 21:47

5.1 Rotation in 3D



Nehmen wir nun an, dass ω eine beliebige Richtung hat

Momentane Rotation:

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O'P}$$

Alternativ dazu:

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{OP} - \mathbf{r}_{OO'}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}$$

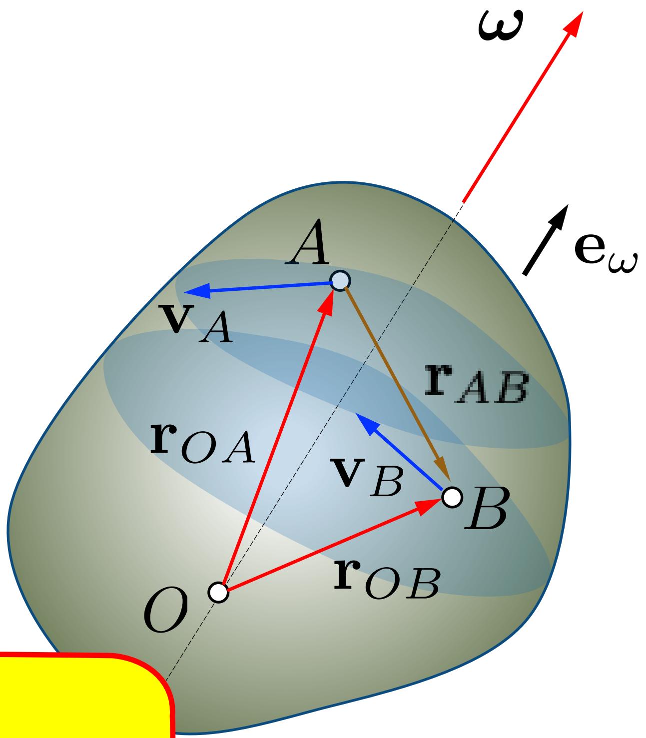
$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP} \quad (*)$$

Alle Punkte auf dem Momentansachse haben Geschwindigkeit null.

$$\mathbf{v}_{O'} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OO'} = \mathbf{0}$$

5.2 Starrkörperformel

5.2 Velocity transfer formula



Nehmen wir jetzt zwei beliebige Punkte A und B auf dem Körper.

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OA} \qquad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OB}$$

sodass:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{(\mathbf{r}_{OB} - \mathbf{r}_{OA})}_{\mathrm{r}_{AB}}$$

Wir bekommen die

***Starrkörperformel*:**

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad \forall\ A, B \in \mathcal{K}$$

"Jeder Punkt des Körpers dreht sich um jeden anderen Punkt des Körpers mit demselben (momentanen) Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$."

Wenn $\mathbf{v}_A$ und $\boldsymbol{\omega}$ bekannt sind, kann die Geschwindigkeit eines beliebigen anderen Punktes des Körpers bestimmt werden.

Kinemate : $\{\mathbf{v}_A, \boldsymbol{\omega}\}$

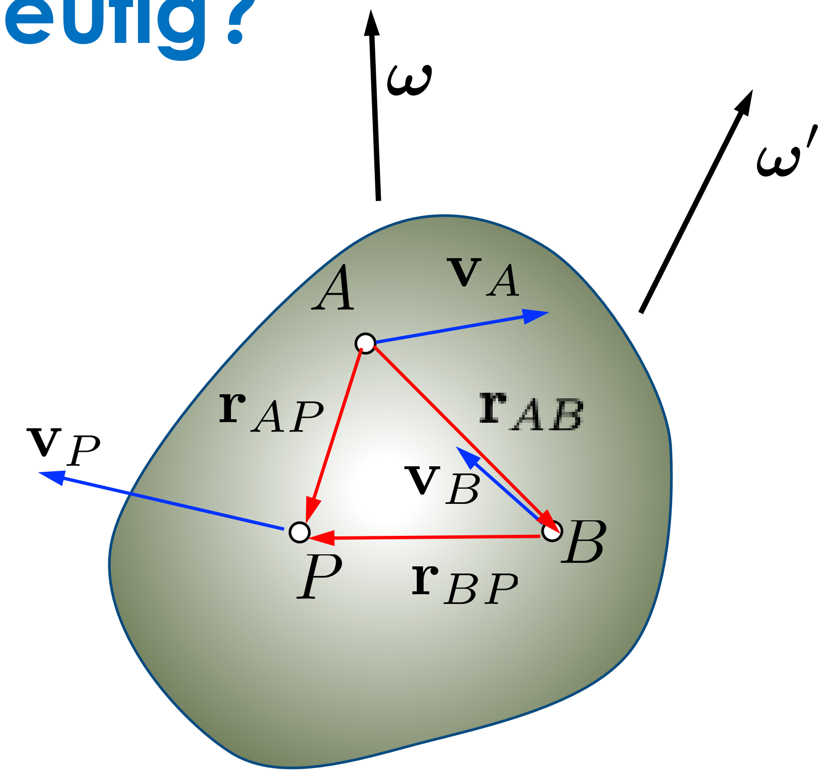
Ist die Rotationsgeschwindigkeit eindeutig?

Nehmen wir an, es gibt zwei Rotationsgeschwindigkeiten

$$\{\mathbf{v}_A, \boldsymbol{\omega}\} \qquad \{\mathbf{v}_B, \boldsymbol{\omega}'\}$$

$\mathbf{v}_P$ kann dann bez. A und B ausgedrückt werden als

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP} \quad (1) \qquad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{BP} \quad (2)$$



$\mathbf{v}_B$ kann auch bez. A ausgedrückt werden als

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (3)$$

(3) in (2) einsetzen:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{BP} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP}$$

$$\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{BP} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{AB} - \mathbf{r}_{AP}) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{BP} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BP} = \mathbf{0} \to (\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}_{BP} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit ist vom Punkt unabhängig.
*Wir sagen, dass die Rotationsgeschwindigkeit eine **Invariante der Kinemate** ist.*

5.3 Invariante der Kinemate

5.3 Invariants of the Kinemate

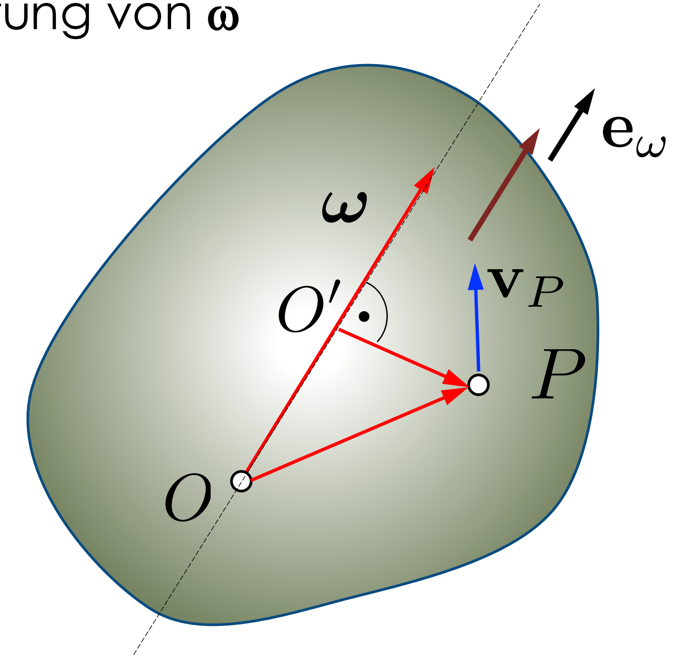
Gibt es weitere Invarianten?

Lassen uns jetzt die Starrkörperformel auf der Rotationsgeschwindigkeit projizieren:

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v}_A$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_A$$

Alle Geschwindigkeiten haben die gleiche Komponente in Richtung von $\boldsymbol{\omega}$



Invariante der Kinemate:

$I_1 = \boldsymbol{\omega}$ Die Rotationsgeschw. ist eindeutig

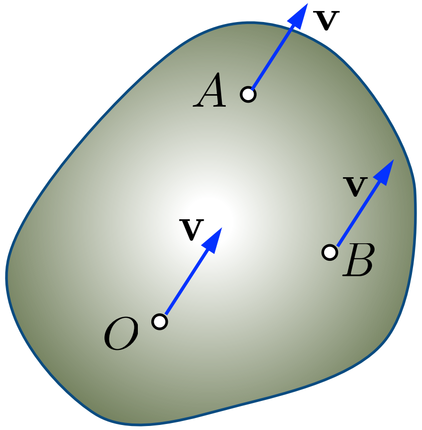
$I_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_P \; \forall P \in \mathcal{K}$ Die Geschwindikeitskomponent von allen Punkten in Richtung w ist gleich

5.4 Bewegungsarten

5.4 Act of motions

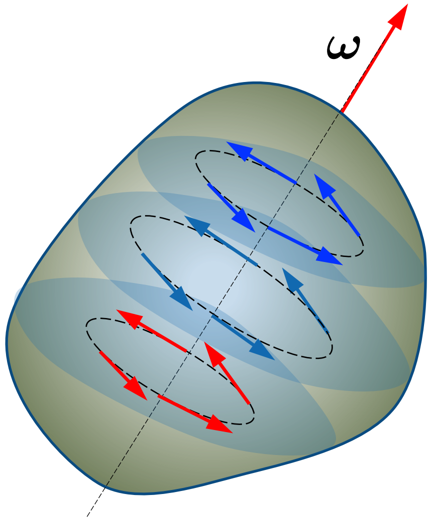
$$I_1 = \boldsymbol{\omega}$$

$$I_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_P \ \forall P \in \mathcal{K}$$



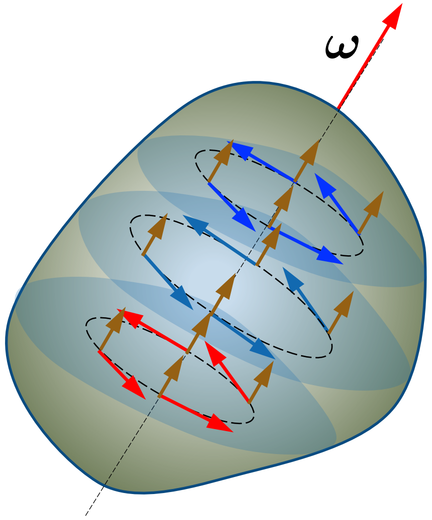
$I_1 = \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \Rightarrow \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B \quad \forall\ A, B \in \mathcal{K}$

$I_2 = 0$ $\quad$ ***Translation***



$I_1 \neq \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$

$I_2 = 0$ $\quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_A = 0$ $\quad$ ***Rotation***

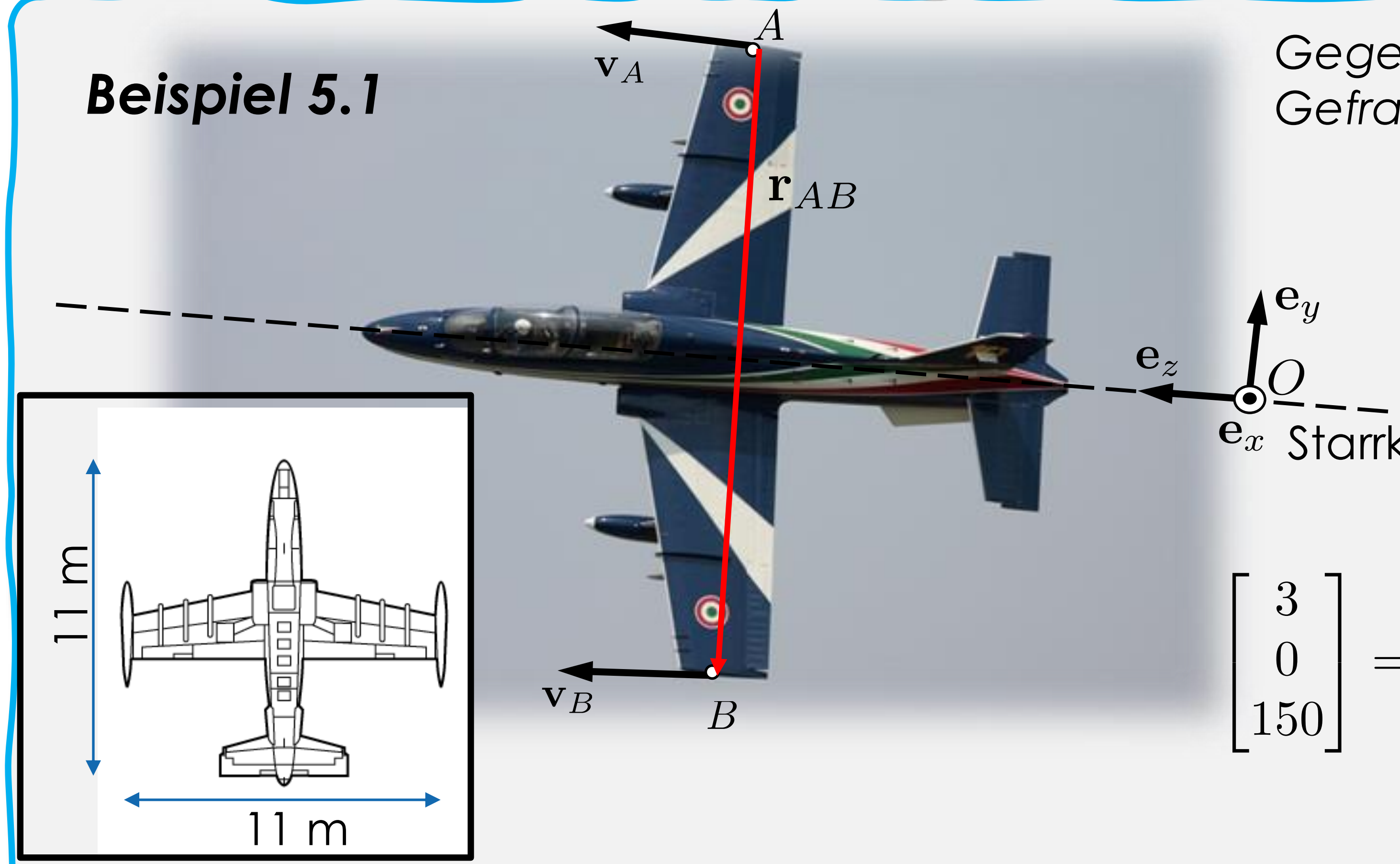


$I_1 \neq \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$

$I_2 \neq 0$ $\quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_A \neq 0$ $\quad$ ***Schraubung***

5.4 Bewegungsarten

Beispiel 5.1



Gegeben: $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$

Gefragt: Bewegungsart? (I_1 und I_2)

$$[\mathbf{v}_A] = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} \text{[m/s]} \quad [\mathbf{v}_B] = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} \text{[m/s]}$$

Starrkörperformel zwischen A und B:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\omega_z - 3 \\ 0 \\ 150 - 11\omega_x \end{bmatrix}$$

Rotationsgeschwindigkeit:

$$150 - 11\omega_x = 150 \rightarrow \omega_x = 0$$

$$\omega_z = \frac{6}{11} = 0.545 \text{ [rad/s]}$$

Invariante:

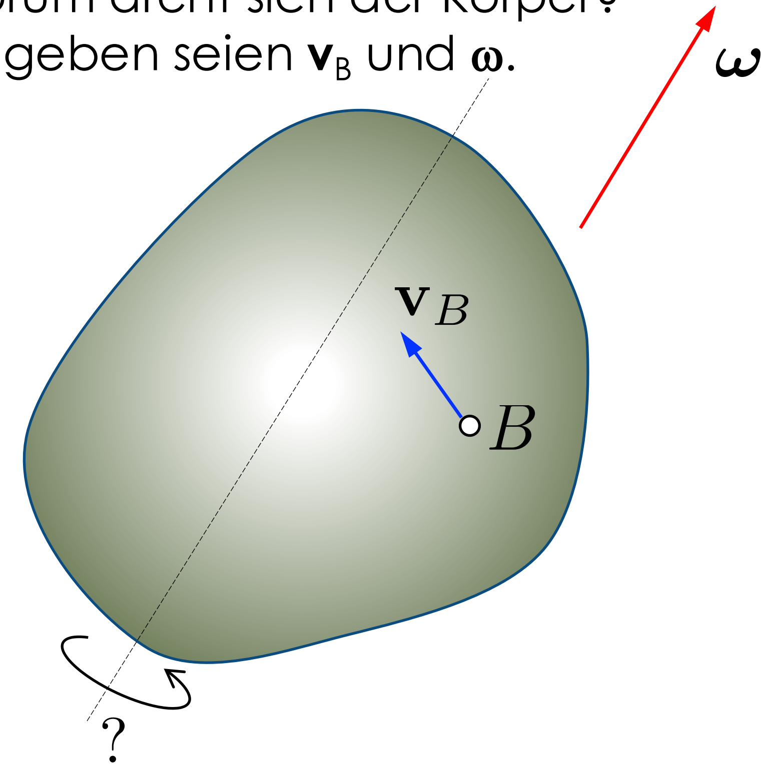
$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.545 \end{bmatrix} \text{[rad/s]}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.545 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} = 81.8 \text{ m/s}^2$$

5.5 Zentralachse

5.5 Axis of instantaneous rotation

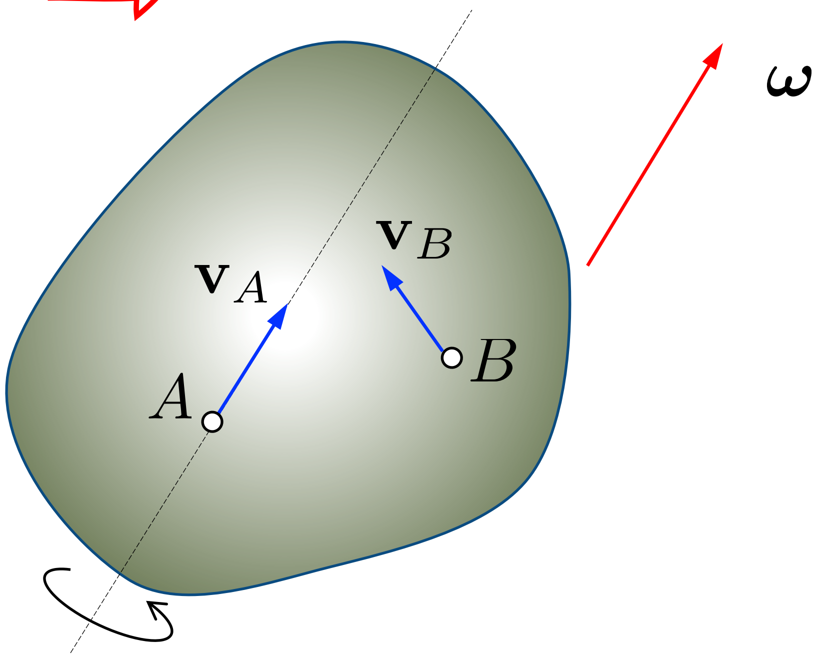
Worum dreht sich der Körper?
Gegeben seien $\mathbf{v}_B$ und $\boldsymbol{\omega}$.



Wir suchen A sodass

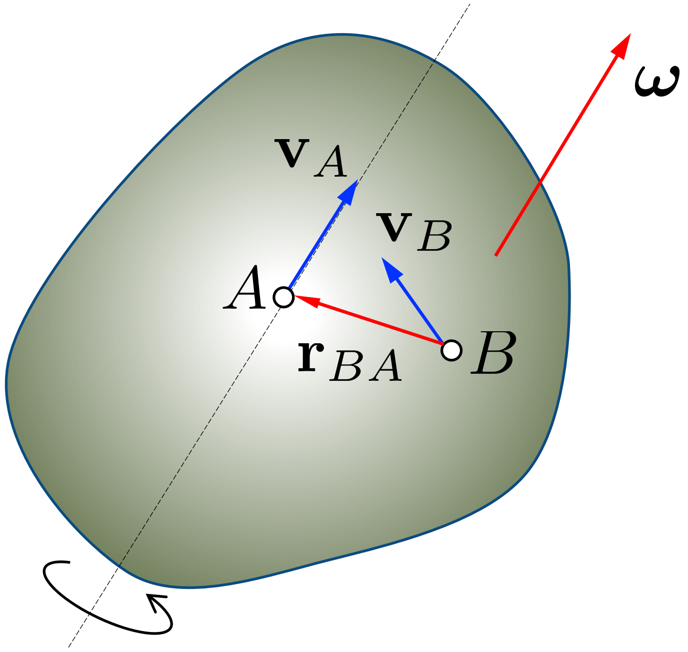
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_A$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A = \mathbf{0}$$



5.5 Zentralachse

5.5 Axis of instantaneous rotation



Starrkörperformel bez. B

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}) =$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{BA})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}_{BA}$$

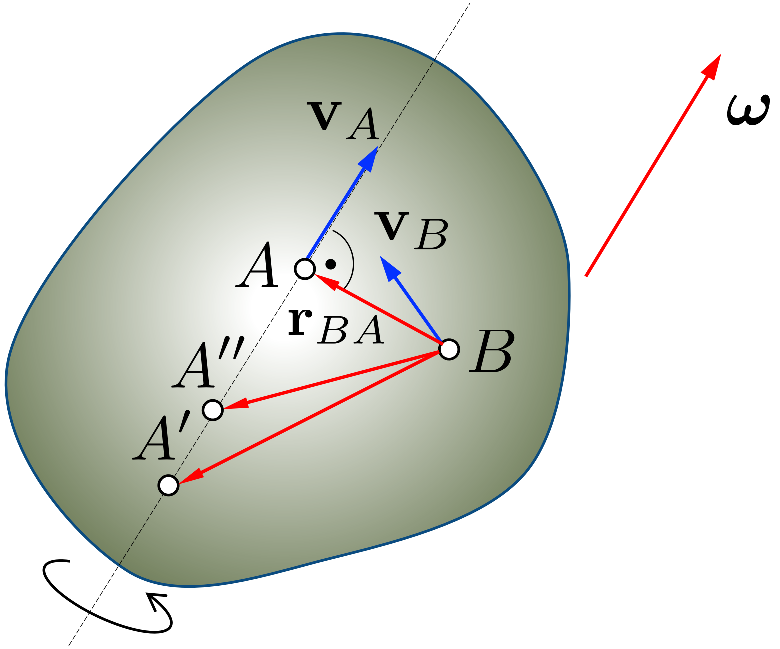
Vektorielle Identität
(Appendix A im Skript)

Wir bekommen eine Gleichung für A:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{BA})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}_{BA} = \mathbf{0}$$

Aus allen Punkten, die die Gleichung erfüllen, wahlen wir A sodass:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{BA} = 0$$



5.5 Zentralachse

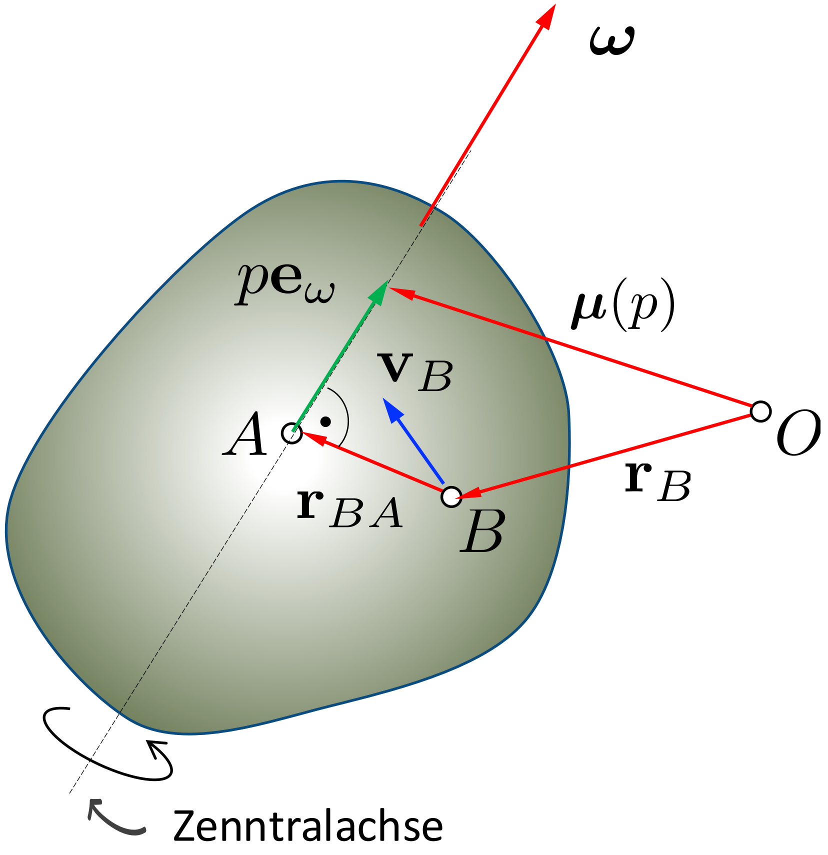
5.5 Axis of instantaneous rotation

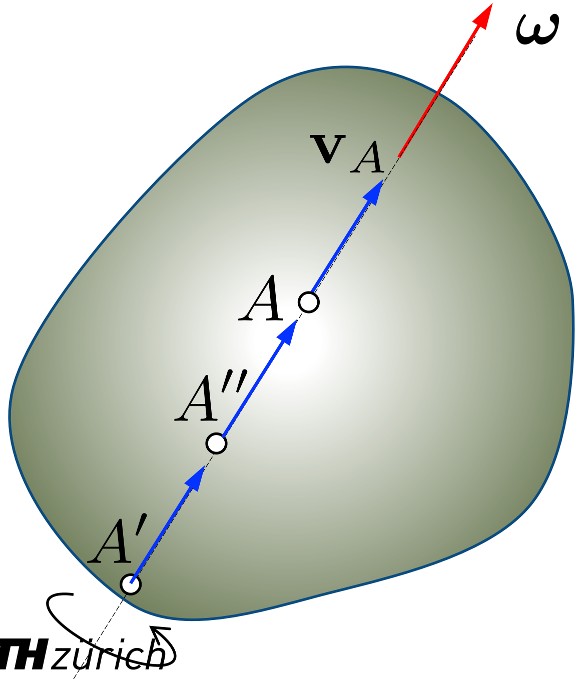
Diese Vereinfachung erlaubt die Berechnung von A

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B - \omega^2 \mathbf{r}_{BA} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{r}_{BA} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B}{\omega^2}$$

Die ***Zentralachse*** wird dann so bestimmt:

$$\boldsymbol{\mu}(p) = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{BA} + p\mathbf{e}_\omega$$

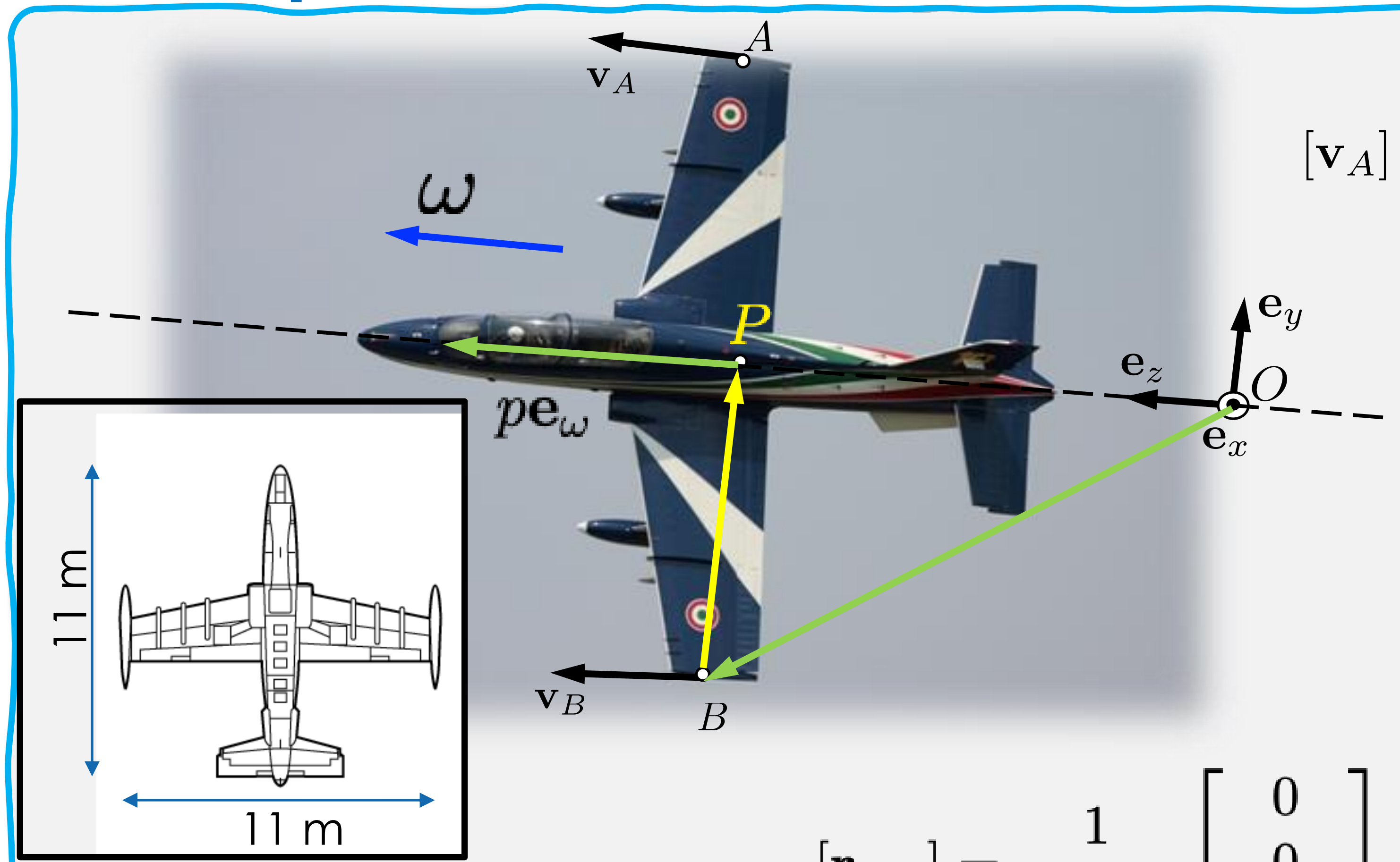




Alle Punkte auf der Zentralachse haben diegleiche Geschw.

$$\mathbf{v}_{A'} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AA'} = \mathbf{v}_A$$

Beispiel



$$[\mathbf{v}_A] = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} \text{ [m/s]} \quad [\mathbf{v}_B] = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} \text{ [m/s]}$$

Punkt P auf Zentralachse:

$$\mathbf{r}_{BP} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B}{\omega^2}$$

Rotationsgeschwindigkeit:

$$150 - 11\omega_x = 150 \rightarrow \omega_x = 0$$

$$\omega_z = \frac{6}{11} = 0.545 \text{ [rad/s]}$$

$$[\mathbf{r}_{BP}] = \frac{1}{0.545^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.545 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/0.545 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}(p) = \mathbf{r}_{OB} + \mathbf{r}_{BP} + p\mathbf{e}_\omega = \mathbf{r}_{OP} + p\mathbf{e}_\omega$$