ETH zürich

D MAVT

Dr. Paolo Tiso

Technische Mechanik

151-0223-10

Vorlesung 02

Kinematik des materiellen Punktes
in zylindrischen Koordinaten

Kinematic of material point in cylindrical coordinates

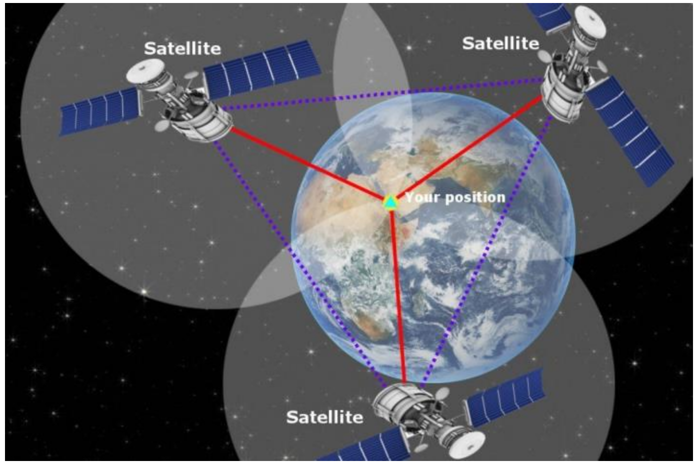
Herbstsemester 2025

Letzte Aktualisierung: 22.09.2025 21:34

2.1 Zylinderkoordinaten

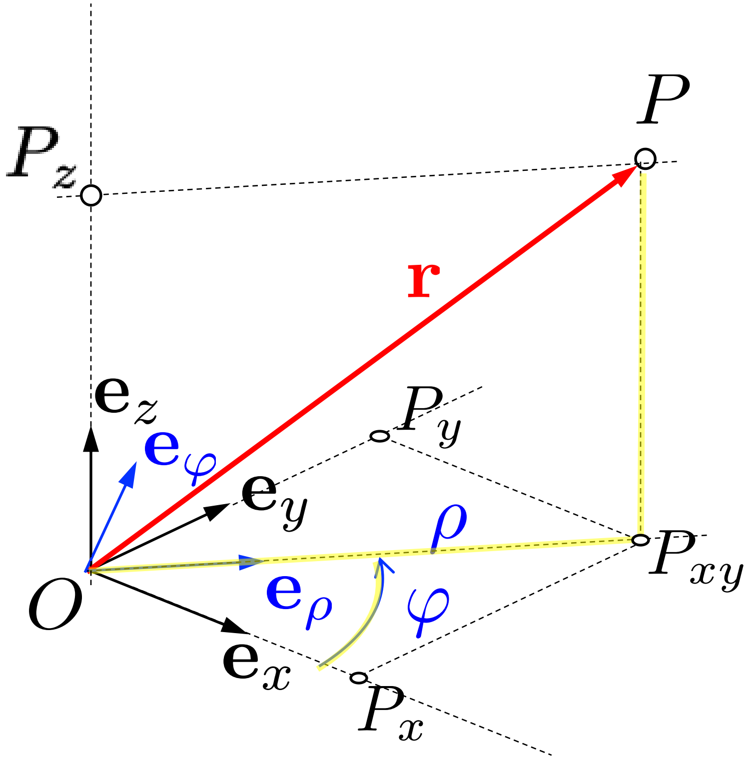
2.1 Cylindrical coordinates

Für bestimmte Probleme ist das kartesische Koordinatensystem nicht die beste Wahl.



2.1 Zylinderkoordinaten

2.1 Cylindrical coordinates



$$\mathcal{C} : \{0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$$

$$\mathcal{Z} : \{0, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$$

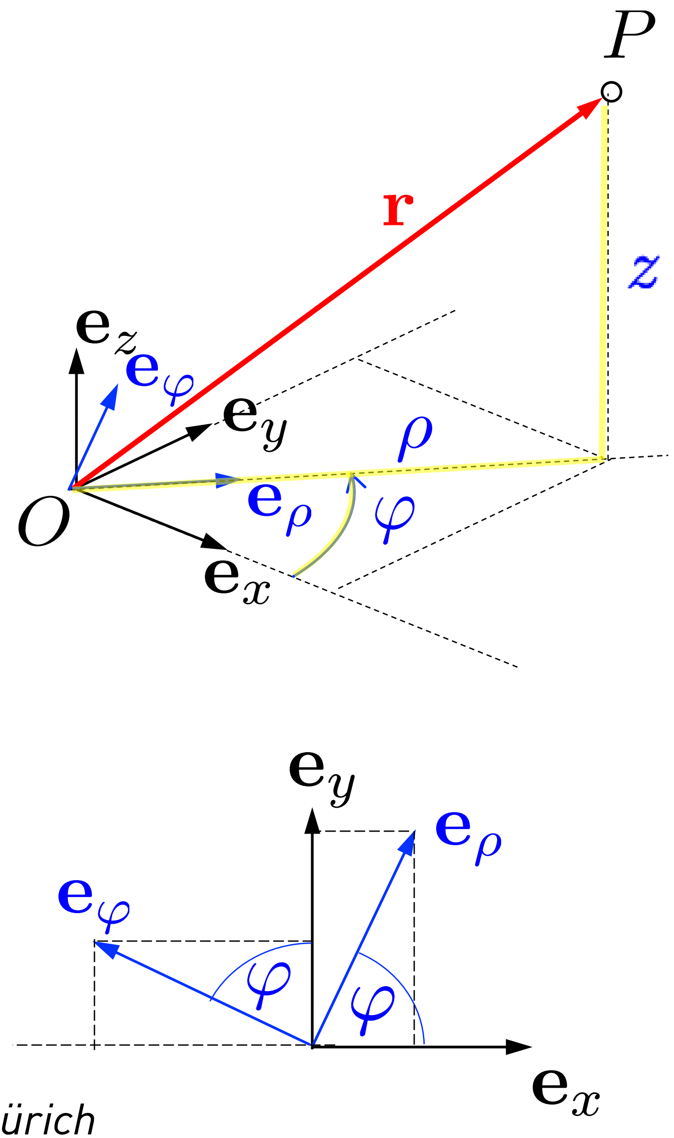
	Kartesischen	Zylindrischen
Definition	$\overline{OP_x} = x$	$\overline{OP_{xy}} = \rho$
	$\overline{OP_y} = y$	$\overset{\frown}{P_xOP_y} = \varphi$
	$\overline{OP_z} = z$	$\overline{OP_z} = z$
Rechts Koord.System	$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1$	$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho = 1$
	$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1$	$\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1$
	$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0$	$\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\rho = 0$
	$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$	$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z$

Transformationsregeln

$\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{C}$	$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Z}$
$x = \rho \cos \varphi$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho \sin \varphi$	$\varphi = \arctan \dfrac{y}{x}$
$z = z$	$z = z$

2.1 Zylinderkoordinaten

2.1 Cylindrical coordinates



Ortsvektor $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$

Lagekoordinaten $[\mathbf{r}]_\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{bmatrix}$

2 Richtungen, aber 3 Koordinaten?

Zyl. Einheitsvektoren als Funktion des kart. Basis:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y$$

Funktion des Winkels

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho(\varphi) + z \mathbf{e}_z$$

2.1 Zylinderkoordinaten

2.1 Cylindrical coordinates

Beispiel: *Red arrows Double Barrel maneuver*

[Link]

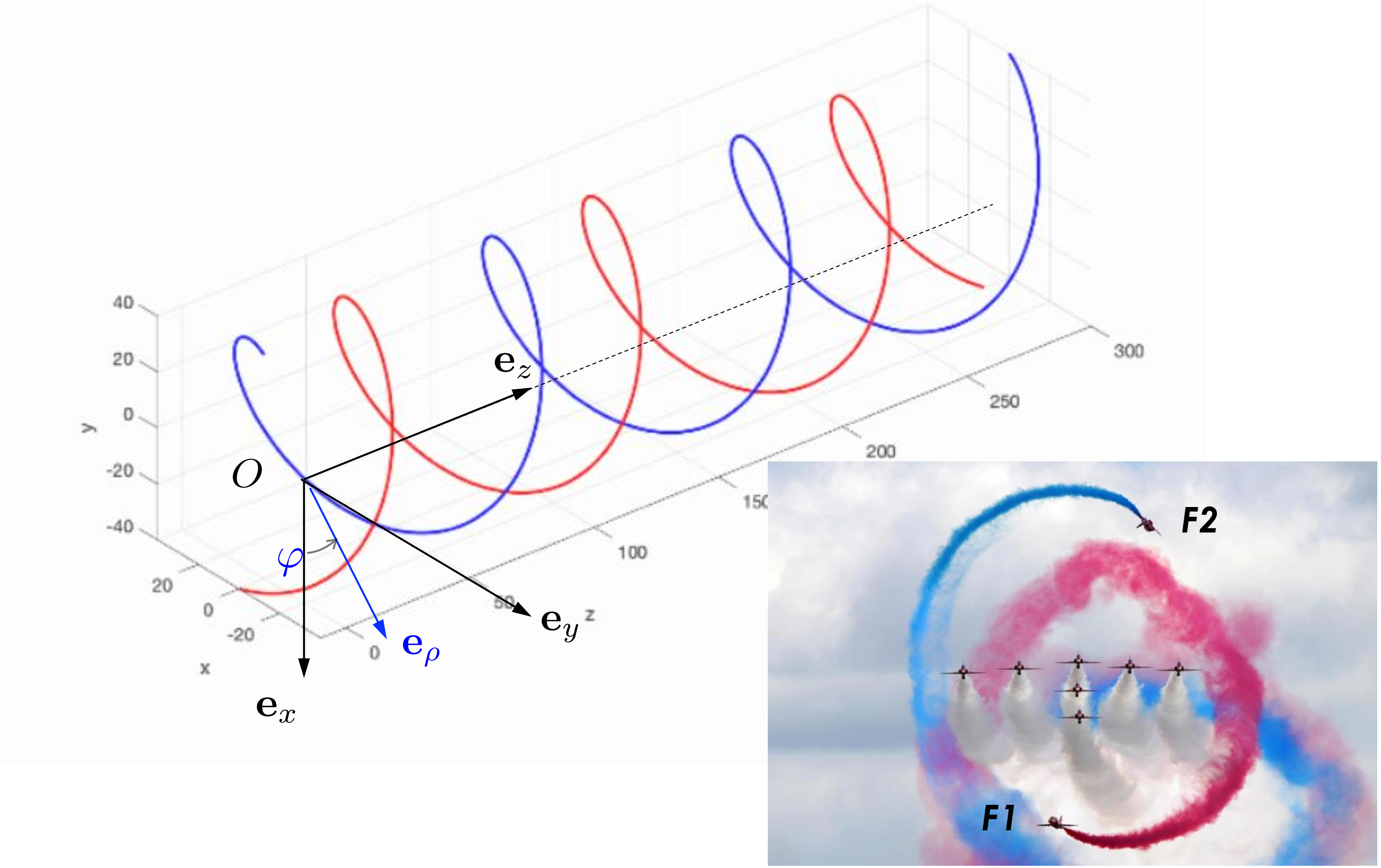
[Link 2] (4:28)

2.1 Zylinderkoordinaten

2.1 Cylindrical coordinates

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \\ \varphi_1(t) &= \\ z_1(t) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2(t) &= \\ \varphi_2(t) &= \\ z_2(t) &= \end{aligned}$$

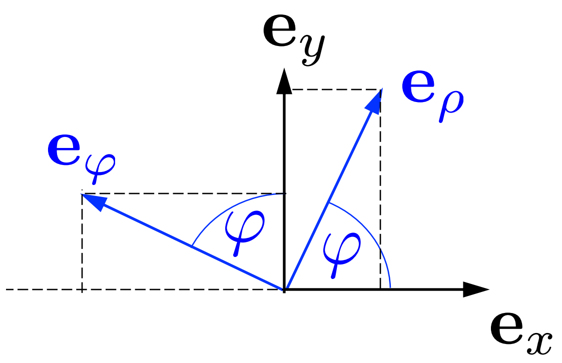


2.1 Zylinderkoordinaten

2.1 Cylindrical coordinates

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\varphi\,\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y$$



Ortsvektor:

$$\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_z$$

Geschwindigkeit:

Nicht null!

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot z\,\mathbf{e}_z + z\,\dot{\mathbf{e}}_z$$

Die Ableitung des $\mathbf{e}_\rho$ ergibt einen Vektor von Betrag 1, der senkrecht zu $\mathbf{e}_\rho$ steht:

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_x + \frac{\mathrm{d}\sin\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_y = -\sin\varphi\,\dot\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\mathbf{e}_y = \dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$$

Geschwindigkeit in zylindrischen Koordinaten :

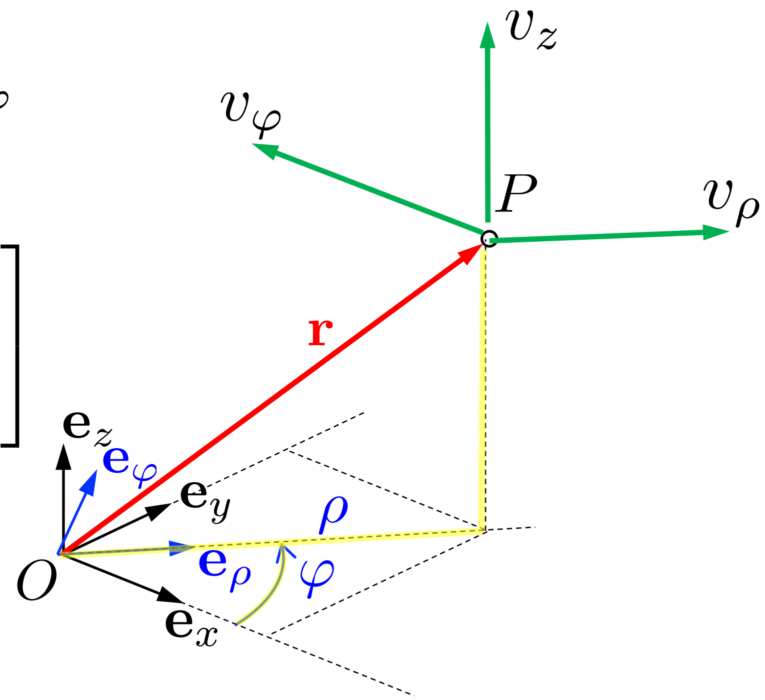
$$\mathbf{v} = \dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \dot z\,\mathbf{e}_z$$

Radiale Komp.

Tangenziale Komp.

Vertikale Komp.

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{Z}} = \begin{bmatrix} v_\rho \\ v_\varphi \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\rho \\ \rho\dot\varphi \\ \dot z \end{bmatrix}$$



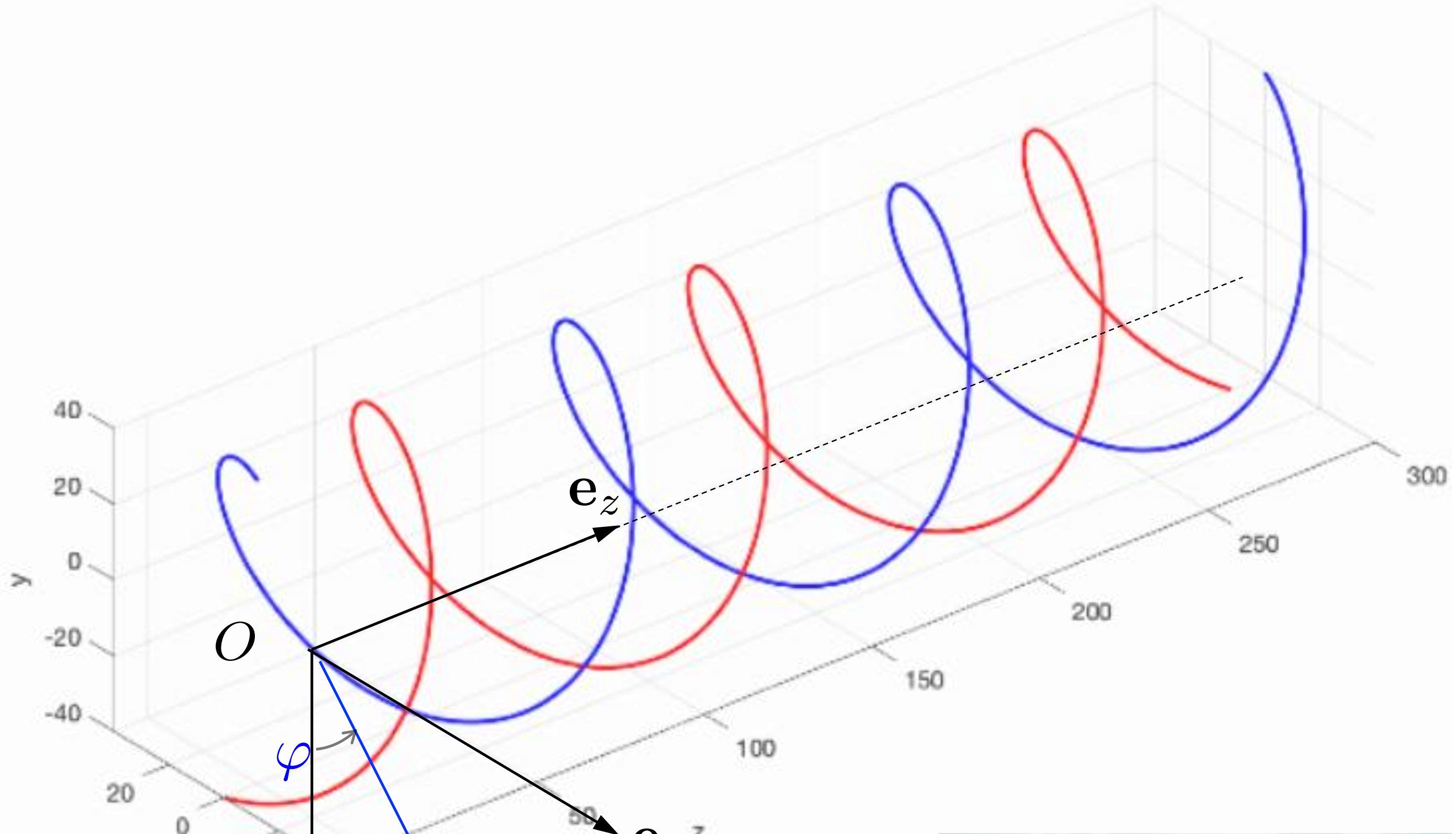
Schnelligkeit in zylindrischen Koordinaten :

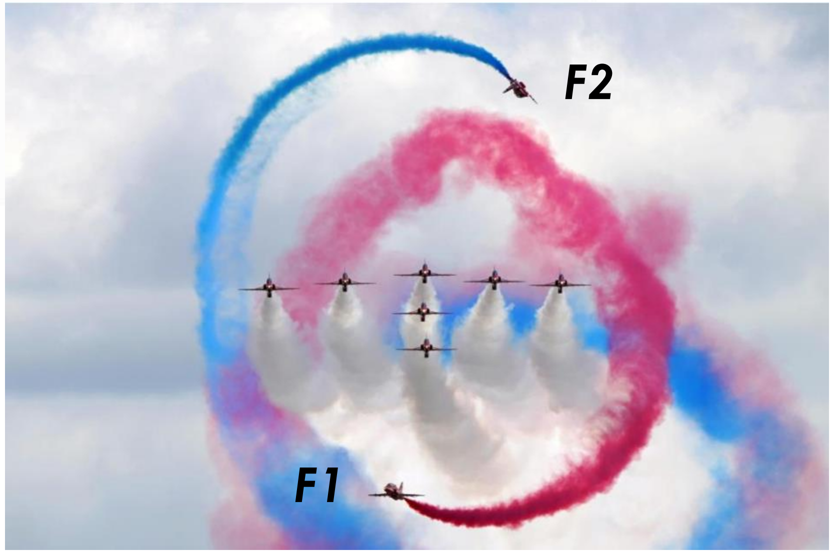
$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2}$$

Beispiel

$$\rho_1(t) = R$$
$$\varphi_1(t) = \omega t$$
$$z_1(t) = v_0 t$$

$$\rho_2(t) = R$$
$$\varphi_2(t) = \omega t - \pi$$
$$z_2(t) = v_0 t - d$$





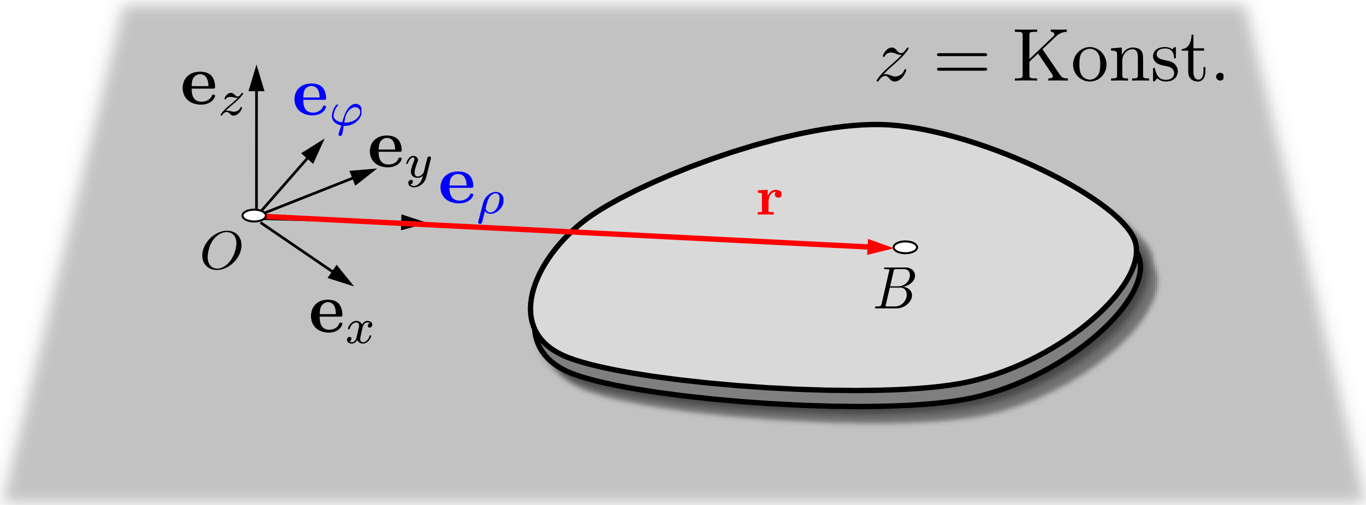
Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\rho}_1 \mathbf{e}_\rho + \rho_1 \dot{\varphi}_1 \mathbf{e}_\varphi + \dot{z}_1 \mathbf{e}_z =$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\rho}_2 \mathbf{e}_\rho + \rho_2 \dot{\varphi}_2 \mathbf{e}_\varphi + \dot{z}_2 \mathbf{e}_z =$$

2.2 Ebene Polarkoordinaten

2.2 Planar polar coordinates



Ortsvektor: $\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$

Geschwindigkeit: $\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$

Schnelligkeit: $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}$

Winkelgeschwindigkeit: $\dot{\varphi}$

2.2 Ebene Polarkoordinaten

Beispiel 2.1

$$x(t) = R\cos\omega t$$
$$y(t) = R\sin\omega t$$
$$z(t) = a$$

Die entsprechende zyl. Koordinaten können durch die Transformationsregeln bestimmt werden:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \omega t + R^2 \cos^2 \omega t} = R$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{R\sin\omega t}{R\cos\omega t} = \arctan(\tan\omega t) = \omega t$$

Die Geschwindigkeit in kart. Koordinaten ist:

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z = R\omega(-\sin\omega t\mathbf{e}_x + \cos\omega t\mathbf{e}_y)$$

Gemäss der Definition ist die Geschwindigkeit in zyl. Koordinaten:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

Wo:

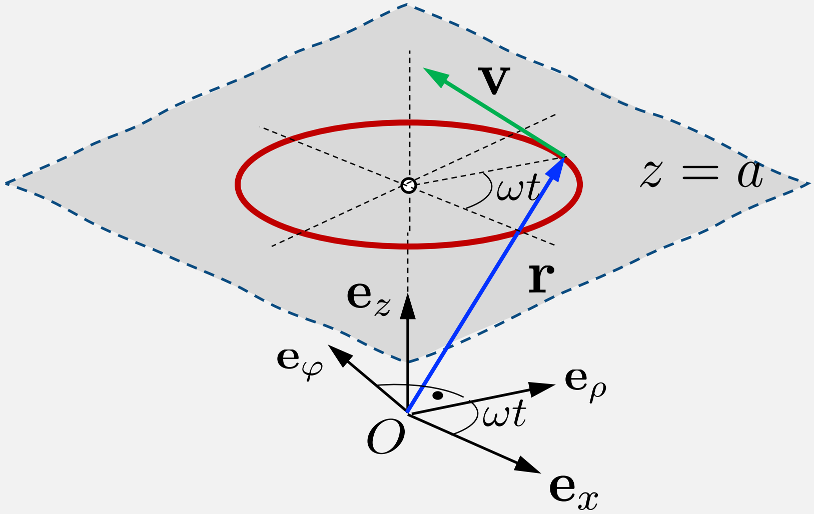
$$\dot{\rho} = \dot{R} = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}(\omega t)}{\mathrm{d}t} = \omega$$

$$\dot{z} = \dot{a} = 0$$

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\mathbf{e}_z = R\omega\mathbf{e}_\varphi$$

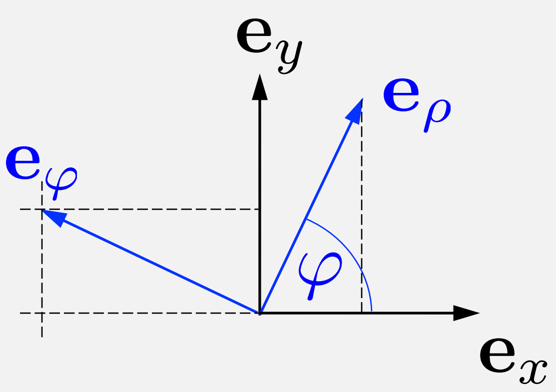
Nur tangenziale Komp.!

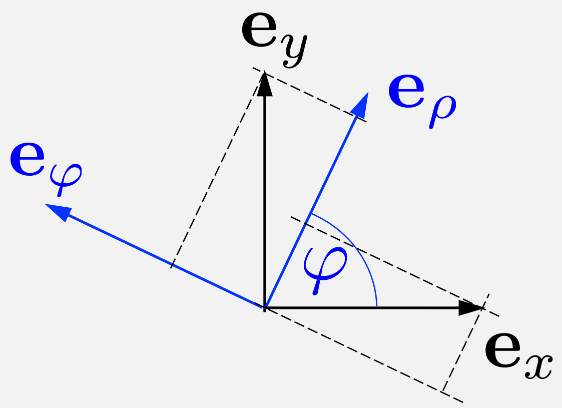


2.2 Ebene Polarkoordinaten

Beispiel 2.1 (vorts.)

Alternativ kann man die Kartesische Basis als Funktion der zylindrischen Basis ausdrücken:





$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos\varphi + \mathbf{e}_y \sin\varphi$$
$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi$$

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\rho \cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin\varphi$$
$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\rho \sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos\varphi$$

Aus dem Ausdrück der Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{v} = R\omega(-\sin\omega t\mathbf{e}_x + \cos\omega t\mathbf{e}_y) =$$
$$= R\omega(-\sin\omega t(\mathbf{e}_\rho \cos\omega t - \mathbf{e}_\varphi \sin\omega t) + \cos\omega t(\mathbf{e}_\rho \sin\omega t + \mathbf{e}_\varphi \cos\omega t)) =$$
$$= R\omega((-\sin\omega t\cos\omega t + \sin\omega t\cos\omega t)\mathbf{e}_\rho + (\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)\mathbf{e}_\varphi) = R\omega\mathbf{e}_\varphi$$