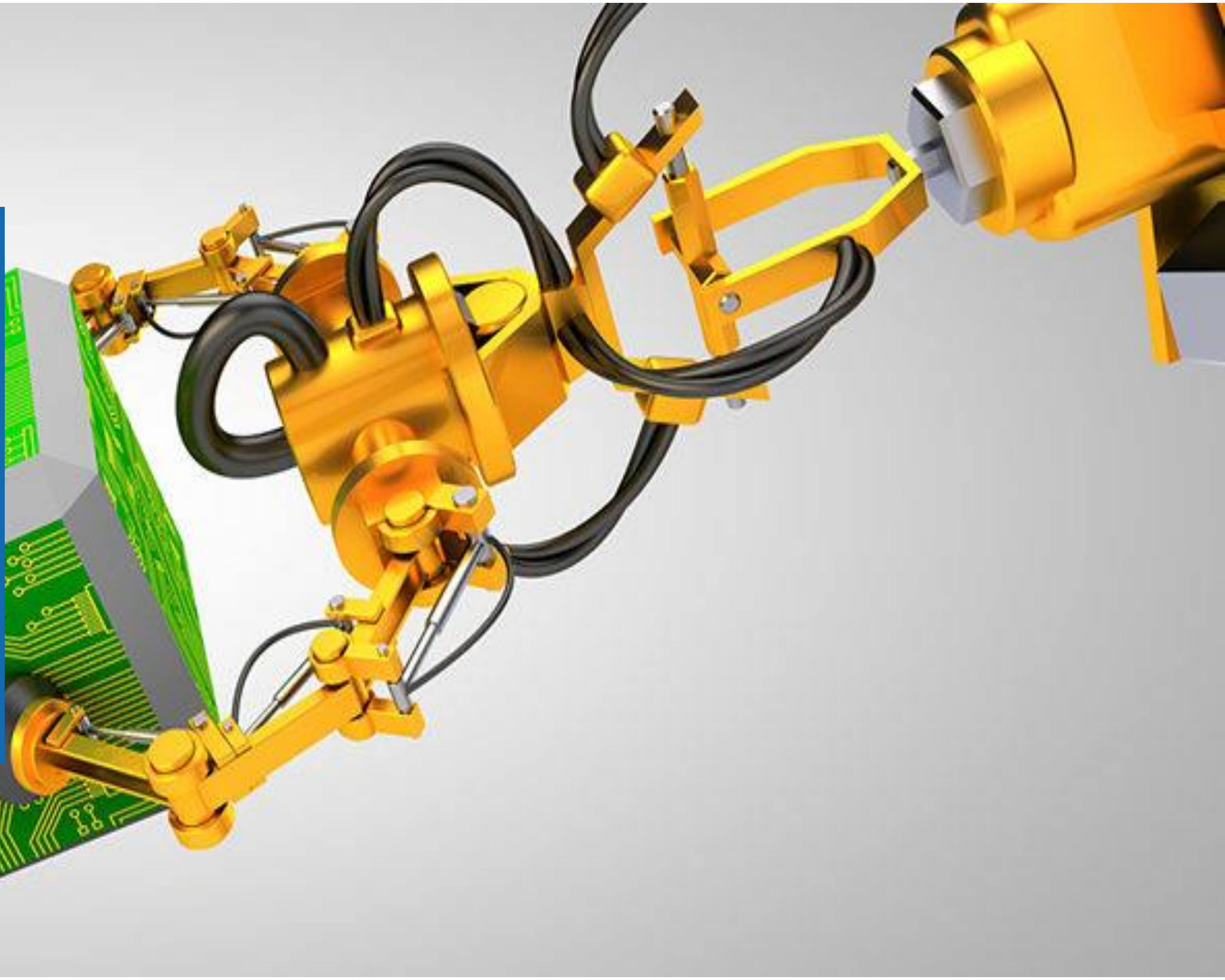
ETH zürich
D MAVT
Dr. Paolo Tiso



Technische Mechanik
151-0223-10

Vorlesung 01

Kinematik des materiellen Punktes
in kartesischen Koordinaten

Herbstsemester 2025

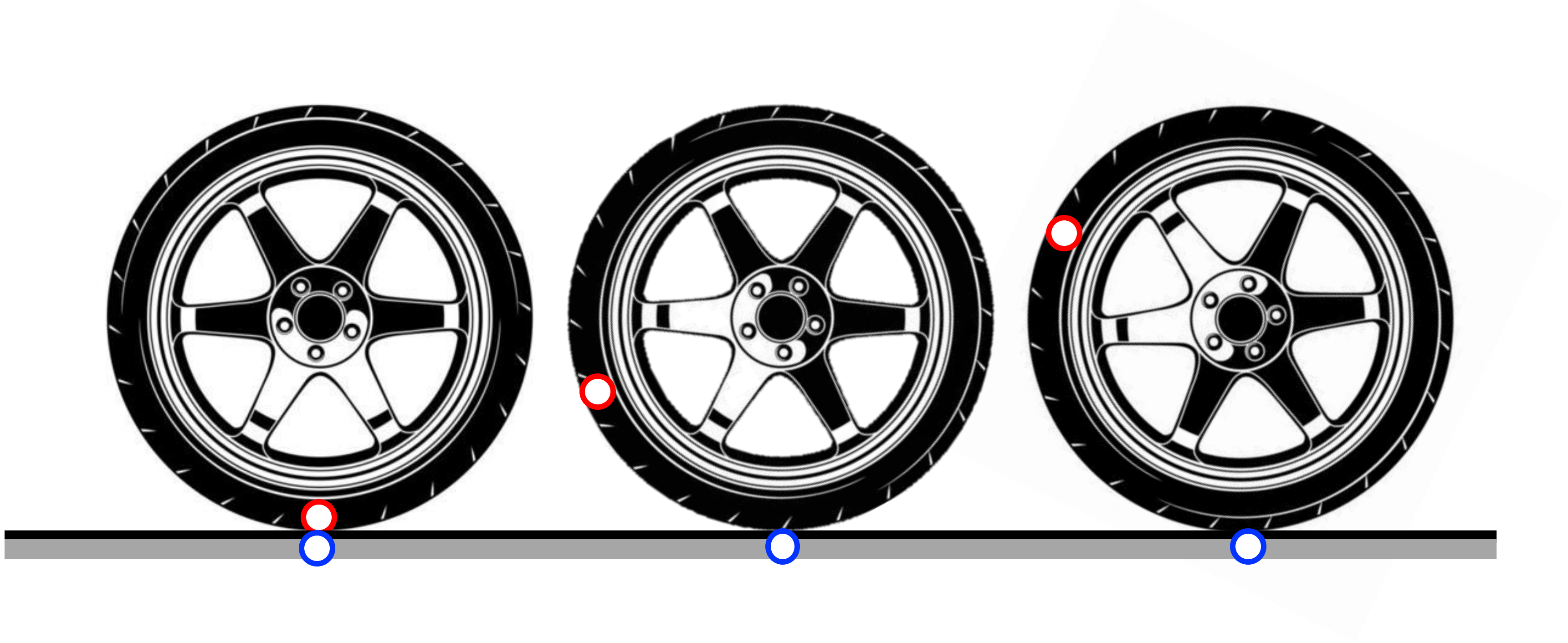
Letzte Aktualisierung: 15.09.2025 21:18

1.0 Materielle vs Geometrische Punkten

1.0 Material vs. Geometrical points

Materielle Punkte gehören zu einem Körper, sind auf ihm markiert

Geometrische Punkte gehören nicht zu Körpern, sondern sind lediglich praktische Punkte für Modellierungszwecke (Projektion, Schnittpunkt usw.).

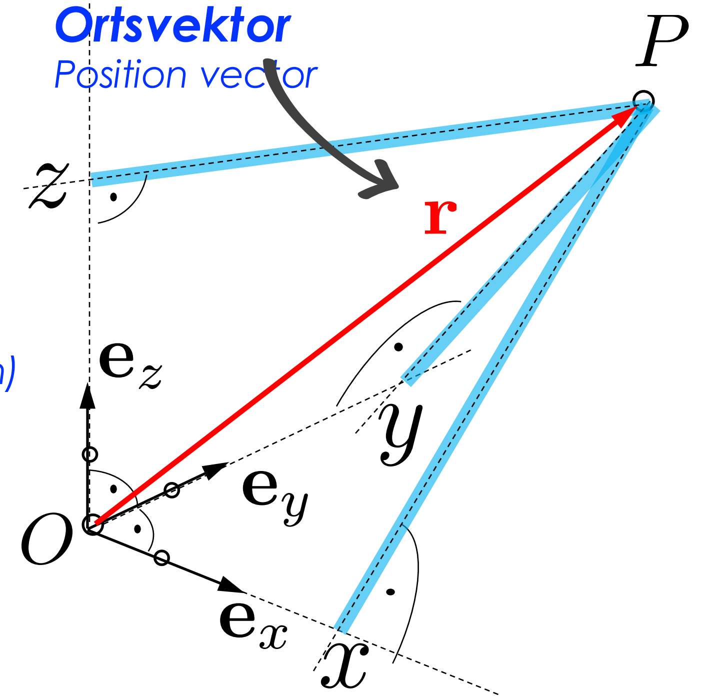


1.1 Ortsvektor und kartesische Koordinaten

1.1 Position vector and cartesian coordinates

Ortsvektor
Position vector

Bezugspunkt
Reference point (origin)



$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = |\mathbf{e}_x| = 1$$

$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = |\mathbf{e}_y| = 1$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = |\mathbf{e}_z| = 1$$

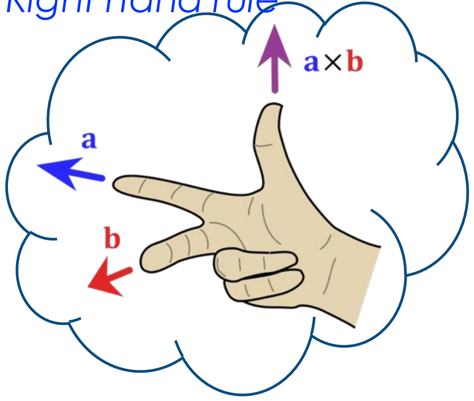
$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0$$

$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$$

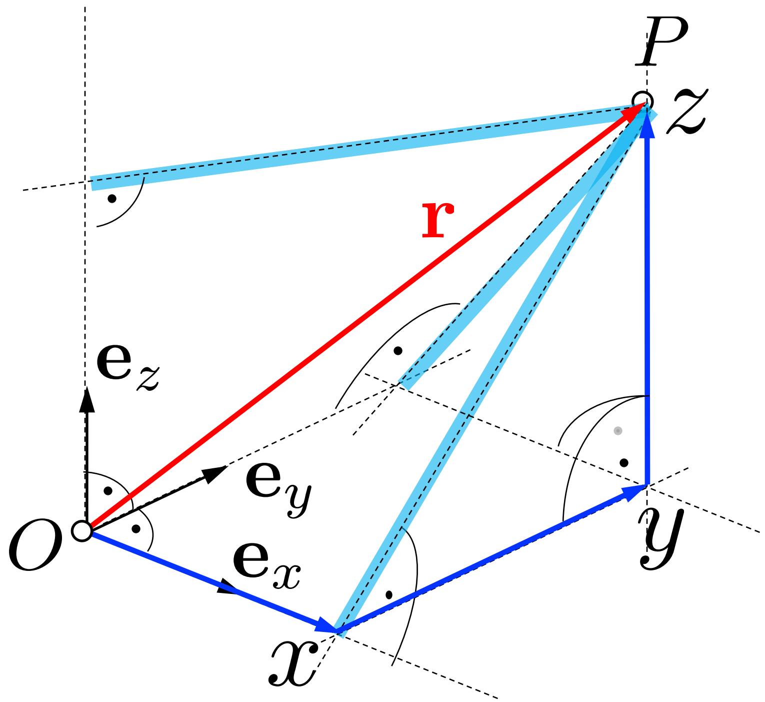
Rechte-Hand-Regel
Right hand rule



Bezugssystem
Reference system

$$\mathcal{C} : \{0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$$

1.1 Ortsvektor und kartesische Koordinaten



Kartesische Darstellung des Ortvektors

Cartesian representation of position vector

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

Lagekoordinaten

Position coordinates

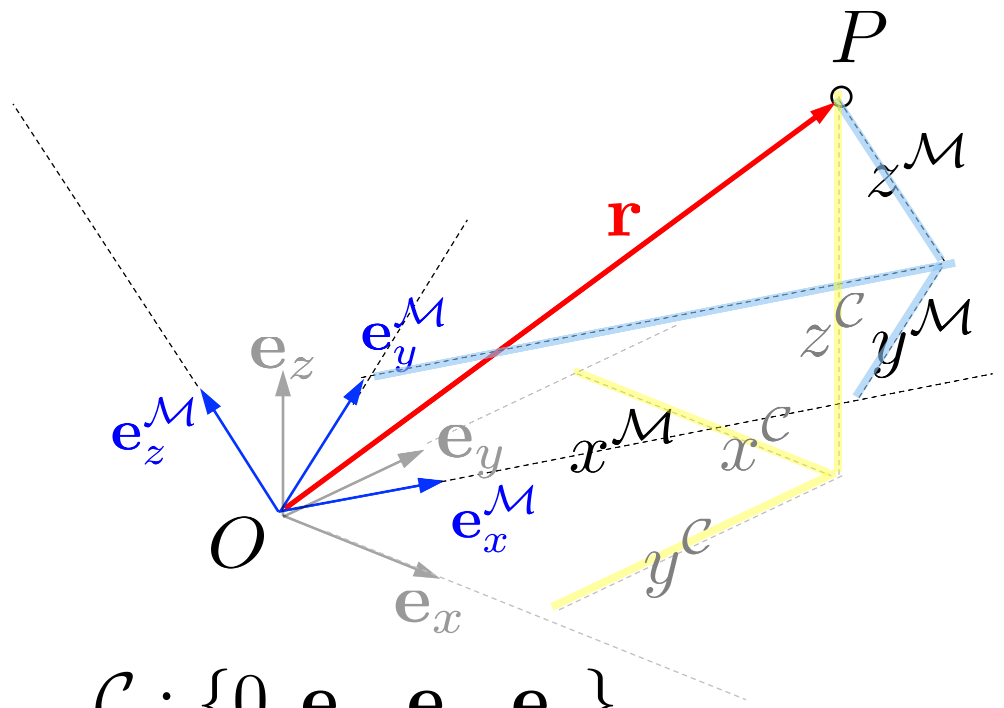
$$[\mathbf{r}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

relativ zum
Koordinatensystem C

Bezugssystem

$$\mathcal{C} : \{0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$$

1.1 Ortsvektor vs Koordinaten



$$\mathcal{C} : \{0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$$

$$\mathcal{M} : \{0, \mathbf{e}_x^{\mathcal{M}}, \mathbf{e}_y^{\mathcal{M}}, \mathbf{e}_z^{\mathcal{M}}\}$$

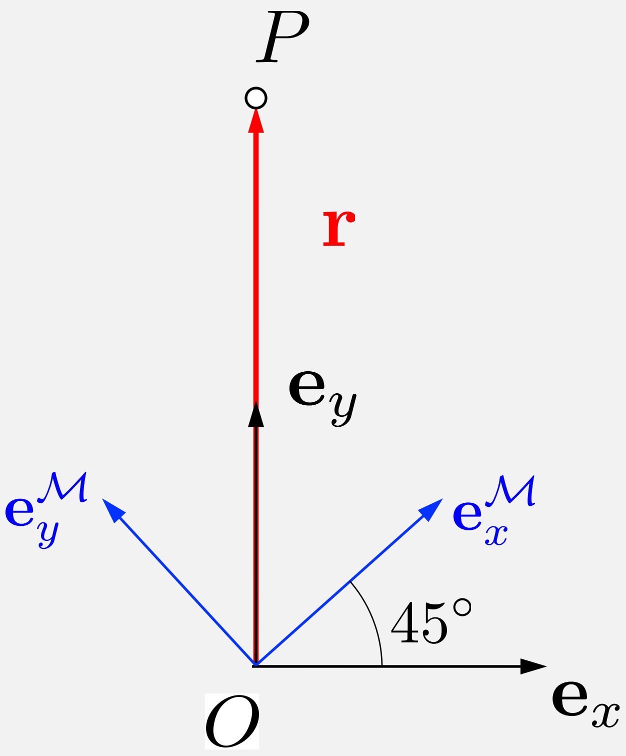
$$[\mathbf{r}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x^{\mathcal{C}} \\ y^{\mathcal{C}} \\ z^{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{r}]_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} x^{\mathcal{M}} \\ y^{\mathcal{M}} \\ z^{\mathcal{M}} \end{bmatrix}$$

Es ist immer derselbe Vektor! Nur die Koordinaten ändern sich, je nach Bezugssystem.

1.1 Ortsvektor vs Koordinaten

Beispiel 1.1



$$|\mathbf{r}| = r = 2$$

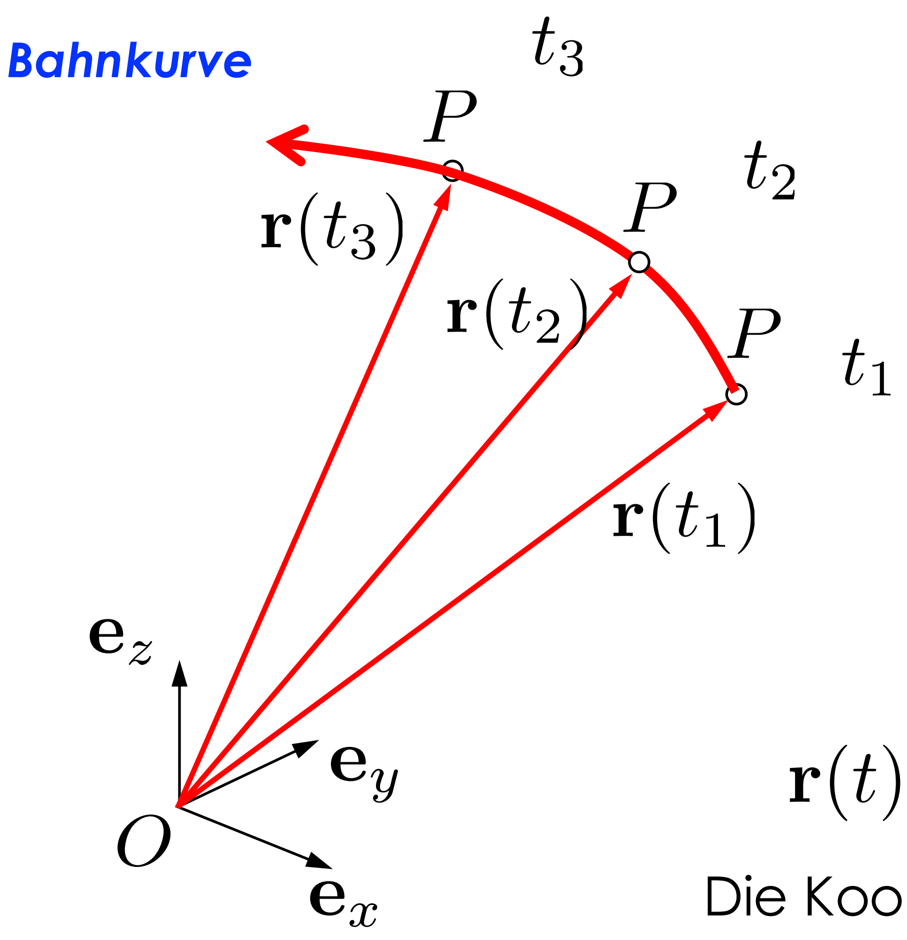
$$[\mathbf{r}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x^{\mathcal{C}} \\ y^{\mathcal{C}} \end{bmatrix} =$$

$$[\mathbf{r}]_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} x^{\mathcal{M}} \\ y^{\mathcal{M}} \end{bmatrix} =$$

1.2 Bahnkurve

1.2 Trajectory

Parametrisierung der Lage des Punktes nach der Zeit:



$$t \to \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$$

Die Koordinaten sind durch Zeit parametrisiert.

1.2 Bahnkurve

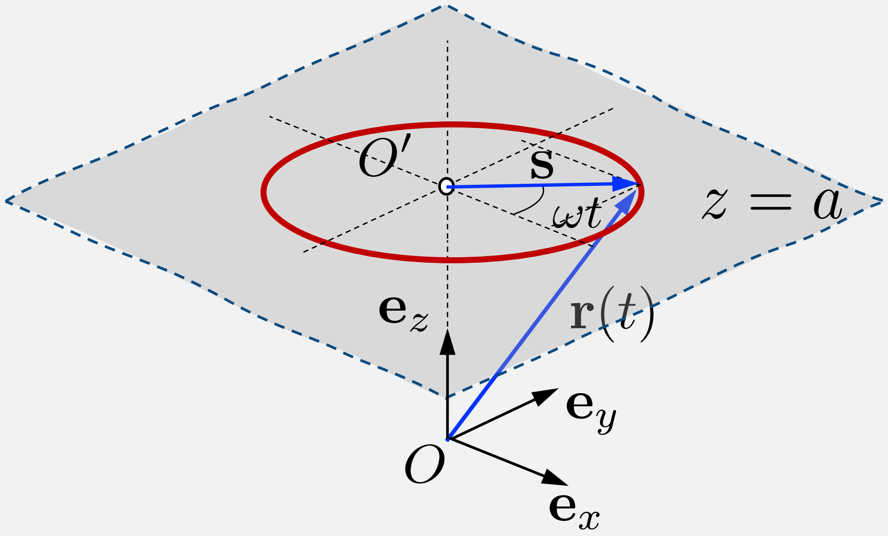
Beispiel 1.2

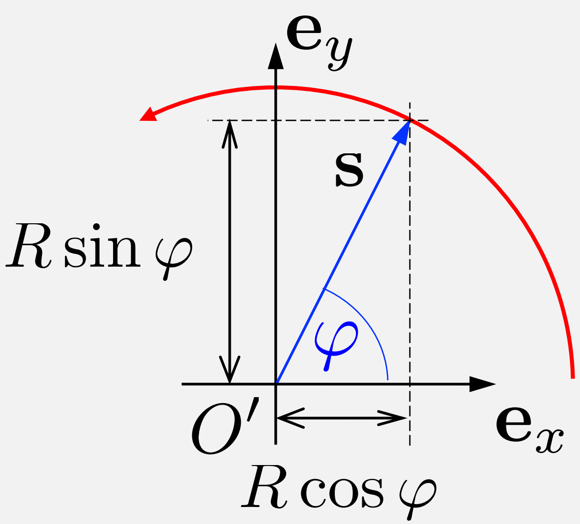
$$x(t) = R\cos\omega t$$
$$y(t) = R\sin\omega t$$
$$z(t) = a$$

$R, \ \omega, \ a$ *gegeben und konstant*

Bahnkurve?

$z(t) = a \quad \Rightarrow$ *Die Bahnkurve liegt auf einer Ebene, die parallel zu xy ist und in einer Höhe a von ihr*





$$|\mathbf{s}| = R$$
$$\varphi = \omega t$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t = R^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = R^2$$

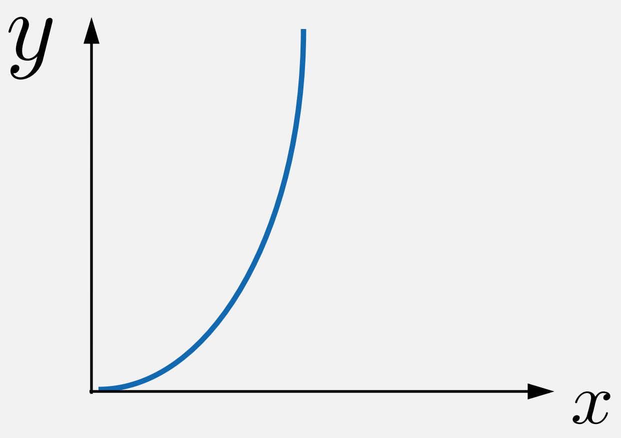
1.2 Bahnkurve

Beispiel 1.3

$$x(t) = at$$
$$y(t) = bt^3$$
$a, b > 0$ *gegeben*

1. Zeit als Funktion von x ausdrücken aus erste Gleichung: $t = \frac{x}{a}$

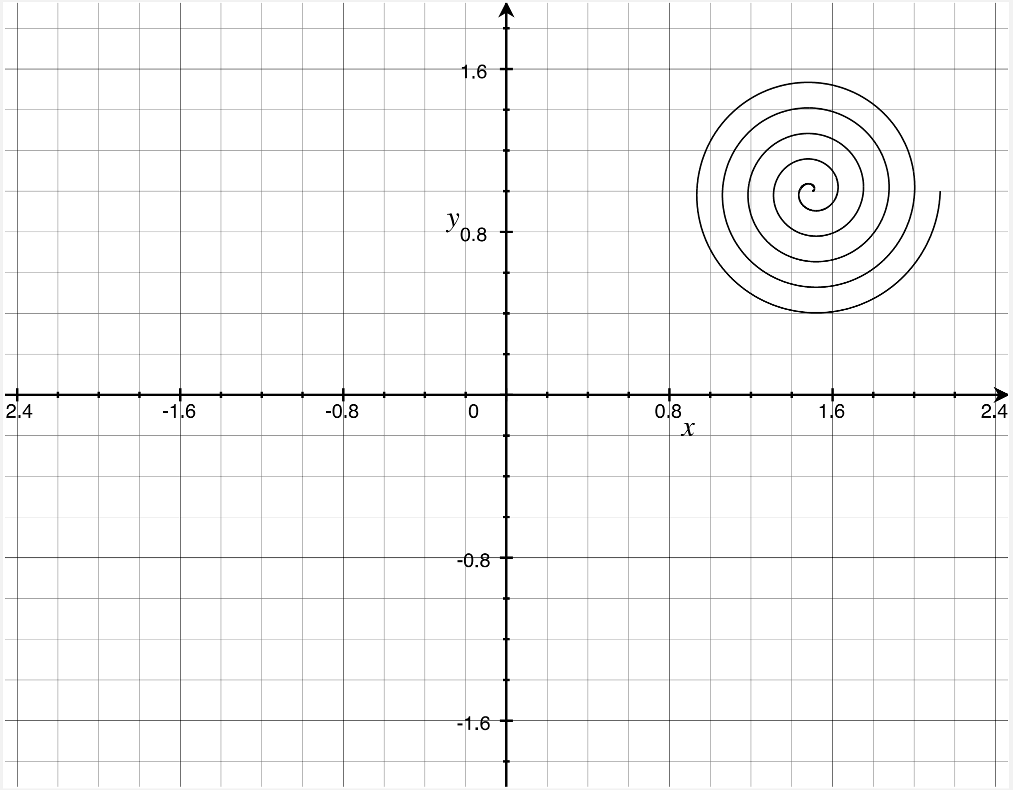
2. Zeit in zweite Gleichung eingeben $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^3 = \frac{b}{a^3}x^3$



$$t = 1 \rightarrow x = a, \; y = b$$
$$t = 2 \rightarrow x = 2a, \; y = 8b$$
$$\cdots$$

1.2 Bahnkurve

Beispiel 1.4



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{50} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

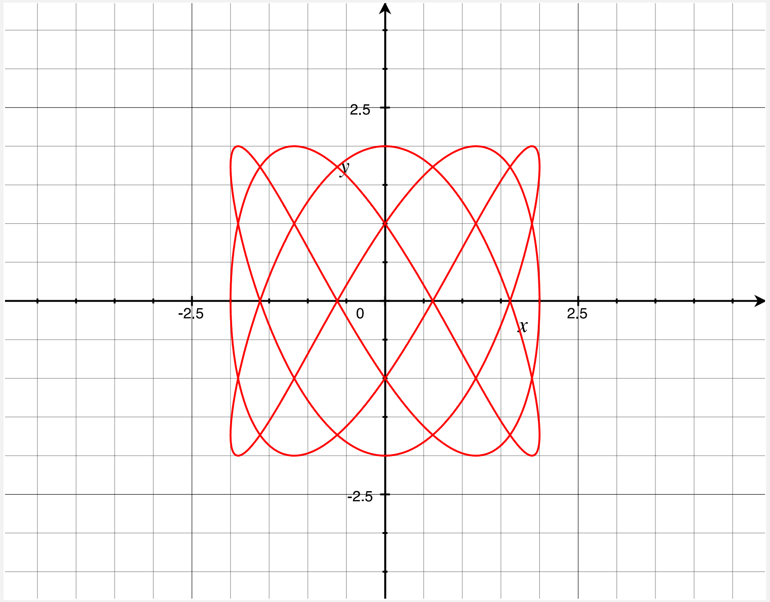
$$0 < t < 10\pi$$

$$t = 0 \rightarrow [\mathbf{r}(0)] = [1.5 \quad 1]^T$$

- ✓ *Kreise mit Zentrum $[1.5\ 1]^T$ und linear steigendem Radius*

1.2 Bahnkurve

Beispiel 1.5



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sin 5t \end{bmatrix} \qquad 0 < t < 2\pi$$

✓ *Die Bahnkurze ist in beiden Richtungen zwischen -2 und 2 beschränkt*

$$x(t) = 0 \rightarrow 2\cos 3t = 0 \rightarrow 3t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots \rightarrow t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(5\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

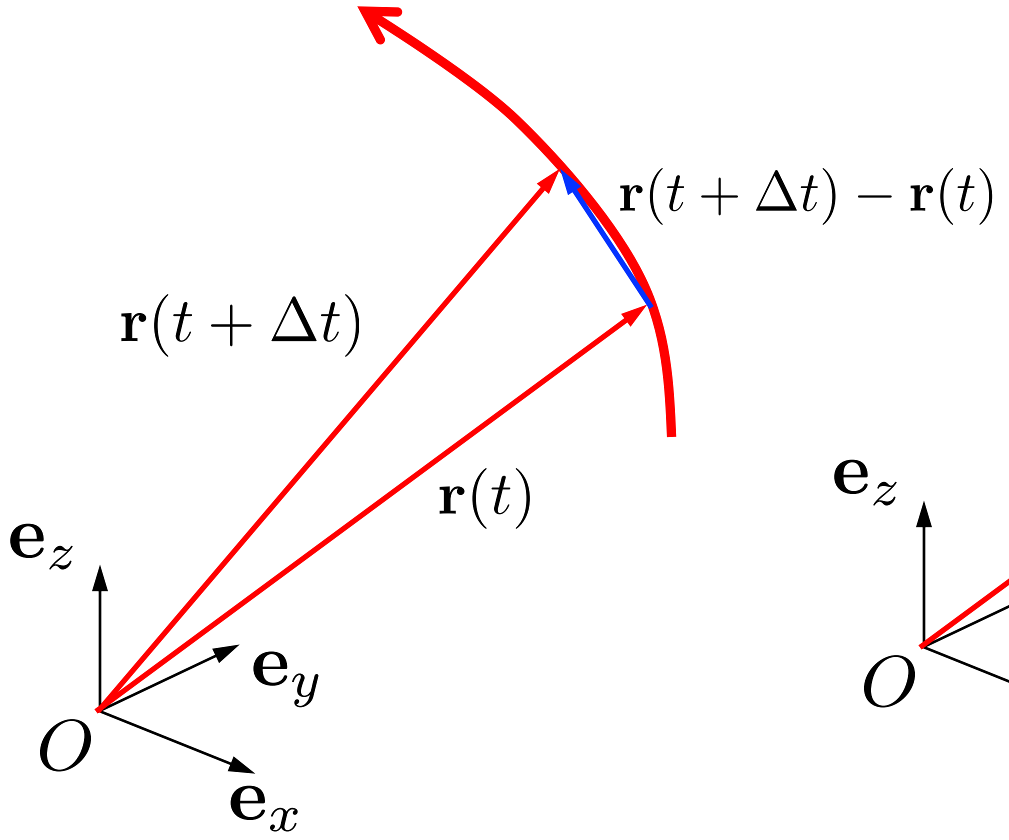
$$\ldots$$

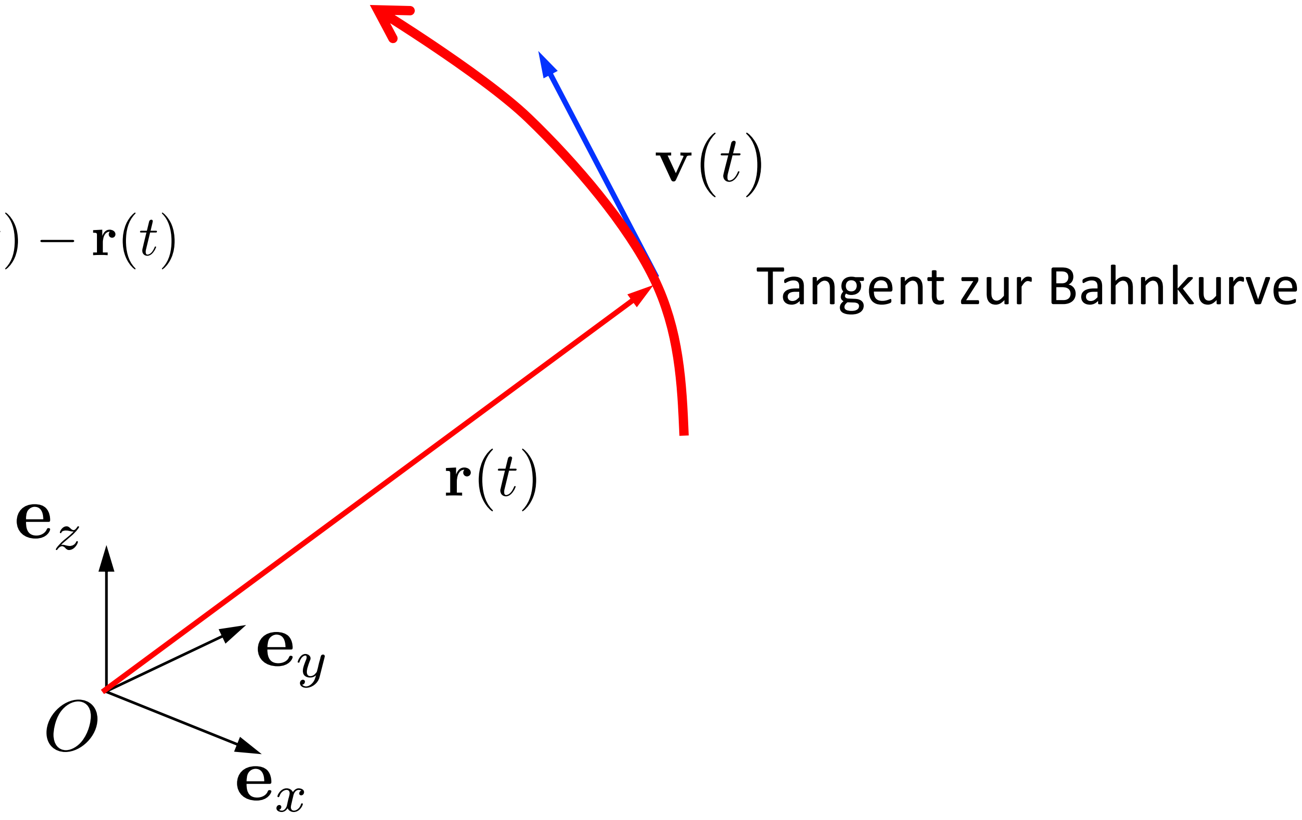
1.3 Geschwindigkeit und Schnelligkeit

1.3 Velocitiy and speed

Wie ändern sich der Ortsvektor? -> Ableitung nach Zeit:

$$\mathbf{v}(t) := \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

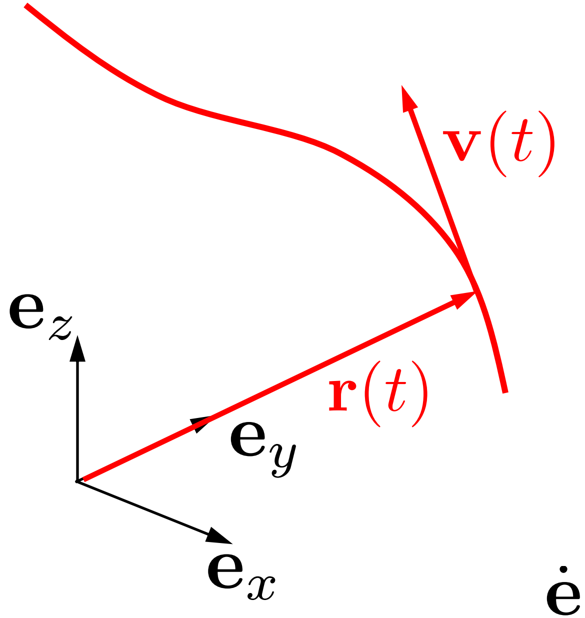




1.3 Geschwindigkeit und Schnelligkeit

Wie berechnet man die Geschwindigkeit?

$$\frac{\mathrm{d}\star}{\mathrm{d}t} = \dot{\star}$$



$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + x\dot{\mathbf{e}}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + y\dot{\mathbf{e}}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z + z\dot{\mathbf{e}}_z$$

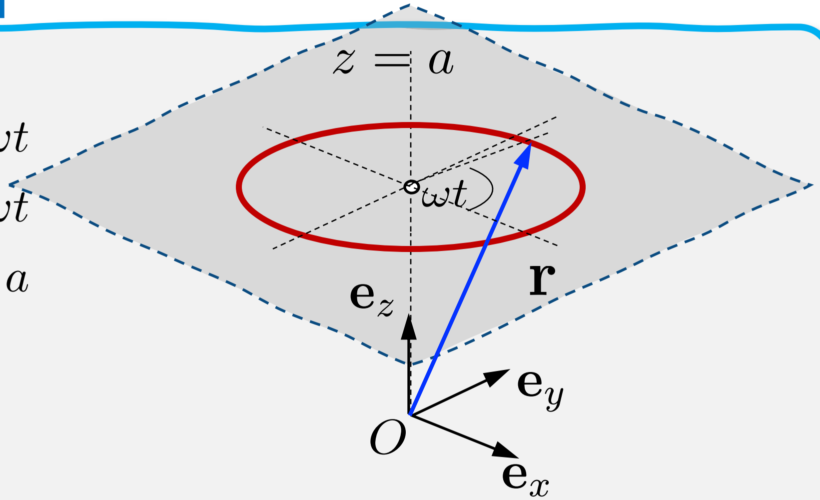
Die Einheitsvektoren des Koordinatensystems sind konstant:

$$\dot{\mathbf{e}}_x = 0, \quad \dot{\mathbf{e}}_y = 0, \quad \dot{\mathbf{e}}_z = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

Geschwindigkeitsvektor*: nur die kartesischen Koordinaten ableiten.*
(Achtung: gilt nur für Kartesischen Koordinaten!)

Schnelligkeit $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Beispiel 1.6



$$x(t) = R\cos\omega t$$
$$y(t) = R\sin\omega t$$
$$z(t) = a$$

Ortsvektor:

$$\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t\mathbf{e}_x + R\sin\omega t\mathbf{e}_y + a\mathbf{e}_z$$

Geschwindigkeit (Vektor!):

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\omega t\mathbf{e}_x) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\omega t\mathbf{e}_y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\mathbf{e}_z) =$$

$$= -R\omega\sin\omega t\mathbf{e}_x + R\omega\cos\omega t\mathbf{e}_y + 0\mathbf{e}_z = R\omega(-\sin\omega t\mathbf{e}_x + \cos\omega t\mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{v}(t) = R\omega(-\sin\omega t\mathbf{e}_x + \cos\omega t\mathbf{e}_y)$$

Schnelligkeit (skalar!):

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{R^2\omega^2(-\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2)} = \sqrt{R^2\omega^2}\sqrt{(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = R\omega$$

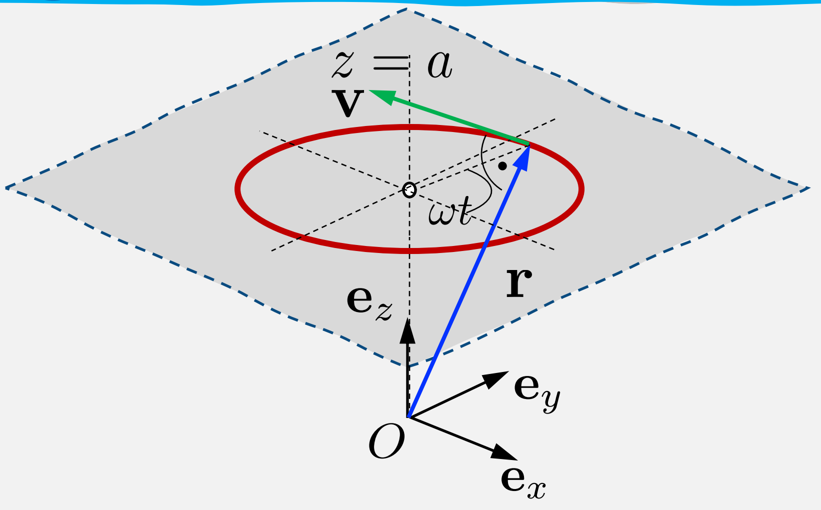
$$v(t) = R\omega$$

1.3 Geschwindigkeit und Schnelligkeit

Beispiel 1.6 (Forts.)

Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(t) = R\omega(-\sin\omega t\mathbf{e}_x + \cos\omega t\mathbf{e}_y)$$



Bemerkungen zur Lösung:

1. *Keine Komponente in z-Richtung*
2. *Senkrecht zu dem Ortsvektor (Achtung: nicht immer gültig!)*

$$\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)^T\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix}-R\omega\sin\omega t & R\omega\cos\omega t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\cos\omega t\\ R\sin\omega t\\ a\end{bmatrix} =$$

$$= R^2\omega(-\sin\omega t\cos\omega t + \sin\omega t\cos\omega t + 0) = 0$$

Schnelligkeit: $v(t) = R\omega$ *Konstant!*

1.3 Geschwindigkeit und Schnelligkeit

Beispiel 1.6 (Forts.)

Wenn der Punkt sich dreimal so schnell dreht:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} R\cos 3\omega t \\ R\sin 3\omega t \\ a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} R\cos 3\omega t \\ R\sin 3\omega t \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\omega R\sin 3\omega t \\ 3\omega R\cos 3\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \sqrt{(-3\omega R\sin 3\omega t)^2 + (3\omega R\cos 3\omega t)^2 + 0^2} = \sqrt{9R^2\omega^2(\sin^2 3\omega t + \cos^2 3\omega t)} = 3\omega R$$